

Ausgewählte Arbeiten über Nachrichtensysteme

Herausgegeben von
Prof. Dr.-Ing. W. Schüßler

Nr. 15

**Über die diskrete Fourier-Transformation
und ihre Anwendungen auf lineare
zeitinvariante Systeme**

von

Dietmar Achilles

Erlangen 1971

1972 # 539



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548401_0044

Ausgewählte Arbeiten über Nachrichtensysteme

Herausgegeben von
Prof. Dr.-Ing. W. Schüßler

Nr. 15

**Über die diskrete Fourier-Transformation
und ihre Anwendungen auf lineare
zeitinvariante Systeme**

von

Dietmar Achilles



Erlangen 1971

Habilitationsschrift

Universität Erlangen-Nürnberg

1971

Berichter: Prof. Dr.-Ing. W. Schüssler
Prof. Dr.-Ing. R. Unbehauen
Prof. Dr. rer.nat. B. Dejon



Für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für
zahlreiche Diskussionen und Ratschläge bin
ich Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Schüsler zu
besonderem Dank verpflichtet.

Herrn Prof. Dr.-Ing. R. Unbehauen möchte
ich für wertvolle Anregungen und Hinweise
und Herrn Prof. Dr. rer.nat. B. Dejon für
sein Interesse an dieser Arbeit danken.

Inhalt

=====

	Seite
0. Einleitung und Übersicht	1-3
1. Die diskrete Fourier-Transformation	4
1.1 Definition	4-7
1.2 Abbildungsgesetze	7-18
1.3 Trigonometrische Interpolation	19-21
1.4 Beziehungen zur Fourier-Transformation stetiger Funktionen	21-33
1.5 Überlagerungssatz	33-37
2. Numerische Ausführung der diskreten Fourier-Transformation	38
2.1 Kurzer Überblick	38-39
2.2 Schnelle Fourier-Transformation	40-44
2.3 Anwendung des Überlagerungssatzes	45-49
3. Realisierung linearer zeitinvarianter diskontinuierlicher Systeme durch schnelle Faltung	50
3.1 Systemeigenschaften	50-52
3.2 Nichtrekursive Systeme	53-73
3.3 Rekursive Systeme	74-84
4. Bestimmung des Zeitverhaltens linearer zeitinvarianter kontinuierlicher Systeme durch schnelle Faltung	85
4.1 Allgemeines Verfahren	85-90
4.2 Periodische Lösungen	90-99
4.3 Verfahren nach W. Klein	99-101
Literaturverzeichnis	102-107
Verzeichnis der wichtigsten verwendeten Symbole	108

0. Einleitung und Übersicht

Die Bedeutung der diskreten Fourier-Transformation (DFT) für die Nachrichtentechnik ist in den letzten Jahren sprunghaft gewachsen, seitdem zu ihrer numerischen Ausführung die besonders leistungsfähigen Algorithmen der schnellen Fourier-Transformation (FFT) verwendet werden. Es sind vor allem zwei fundamentale nachrichtentechnische Aufgabenbereiche, denen die diskrete Fourier-Transformation heute als unentbehrliches mathematisches Werkzeug dient: die Signalanalyse und die Signalverarbeitung. Zwei Eigenschaften der diskreten Fourier-Transformation treten dabei besonders hervor:

- (1) Die diskrete Fourier-Transformierte einer Folge von N Zahlen liefert die Koeffizienten der trigonometrischen Interpolation einer äquidistanten Stützfunktion, die aus diesen Zahlen gebildet wird.
- (2) Matrizen zyklischer Bauart lassen sich durch Äquivalenztransformation mit der Matrix der diskreten Fourier-Transformation diagonalisieren.

Die trigonometrische Interpolation ist das klassische numerische Hilfsmittel zur Spektralanalyse. Ihre Ausführung beschränkte sich jedoch auf relativ kleine Anzahlen von Stützwerten der zu transformierenden Funktion ($N \lesssim 100$), solange der Einsatz von elektronischen Datenverarbeitungsanlagen noch nicht möglich war. Die Leistungsfähigkeit moderner Digitalrechner und die Effektivität der FFT-Algorithmen erlauben es dagegen heute, die diskrete Fourier-Transformation auch für solche Aufgaben der Spektralanalyse einzusetzen, die noch vor einigen Jahren analogen Mitteln (Filterbänken) vorbehalten blieben: beispielsweise die Echtzeit-Spektralanalyse von Doppler-Radarsignalen [54].

Der umfangreiche Problemkreis der Spektralanalyse (z.B. [26]) wird in der vorliegenden Arbeit nur insoweit berührt, als die Eigenschaften der diskreten Fourier-Transformation, die in diesem Zusammenhang von Bedeutung sind, erörtert werden. Das betrifft insbesondere die Beziehungen zwischen den Fourier-Koeffizienten bzw. dem Fourier-Integral einerseits und den Koeffizienten der trigonometrischen Interpolation andererseits. Sie werden im ersten Kapitel dargestellt und

durch die Gegenüberstellung der Eigenfunktionen der Fourier-Transformation und der Eigenvektoren der diskreten Fourier-Transformation veranschaulicht. Interessant sind für die digitale Spektralanalyse weiterhin die ebenfalls im ersten Kapitel behandelten Korrespondenzen in den Abbildungsgesetzen beider Transformationen, insbesondere die Äquivalenzen bei der Abbildung gewisser Symmetrieeigenschaften und bei der wiederholten Ausführung der Transformationen.

Das zweite Kapitel bezieht sich auf die numerische Ausführung der diskreten Fourier-Transformation. In Anbetracht der großen Zahl der zu diesem Thema erschienenen Publikationen wird hier nur das Grundprinzip der schnellen Fourier-Transformation am Beispiel des Cooley-Tukey-Algorithmus erläutert. Als neue Variante dazu wird die Anwendung des Überlagerungssatzes der diskreten Fourier-Transformation auf die schnelle Fourier-Transformation etwas ausführlicher behandelt.

Ein wesentlicher Teil der Arbeit ist der Anwendung der diskreten Fourier-Transformation auf die digitale Signalverarbeitung durch lineare zeitinvariante diskontinuierliche Systeme (digitale Filter) gewidmet. Von zentraler Bedeutung ist in diesem Zusammenhang der Faltungssatz der diskreten Fourier-Transformation, der zu der oben genannten Eigenschaft (2) äquivalent ist. Wesentlich für seine Anwendbarkeit ist es, daß man endliche Faltungsmatrizen zu Matrizen zyklischer Bauart erweitern kann, ohne den relevanten Bestandteil der durch die diskrete Faltung beschriebenen Signalverarbeitung zu verändern. Die diskrete Faltung läßt sich dann im wesentlichen durch drei diskrete Fourier-Transformationen ersetzen. Anhand der Gegenüberstellung zweier Schaltungsanordnungen, von denen die eine der direkten Ausführung der diskreten Faltung und die andere der Ausführung über die diskrete Fourier-Transformation entspricht, wird veranschaulicht, daß die letztere Art der Realisierung digitaler Filter nur dann mit geringerem Aufwand verbunden sein kann, wenn zur Ausführung der diskreten Fourier-Transformation FFT-Algorithmen verwendet werden. In diesem Fall spricht man von "Schneller Faltung".

Die Realisierung digitaler Filter durch schnelle Faltung ermöglicht gegenüber anderen Realisierungen eine große Zeitersparnis, wenn lange Datenfolgen durch relativ hochgradige Systeme verarbeitet werden müssen. Beispiele hierfür sind: die Filterung von Sprache, die Analyse von seismischen Signalen und als Extremfall die Signalverarbeitung bei der interplanetaren Fernsehbildübertragung [3]. Ein weiterer

Vorteil dieser Art der Realisierung von digitalen Filtern ist die große Flexibilität. Die Filtereigenschaften lassen sich sehr leicht variieren. Schließlich kann man auf diese Weise ohne Schwierigkeiten auch Folgen komplexer Zahlen (z.B. analytische Signale) durch digitale Filter mit komplexen Parametern verarbeiten [25].

Die bekannten praktischen Anwendungen dieser Art beziehen sich auf nichtrekursive Systeme. Die Realisierung rekursiver digitaler Filter durch schnelle Faltung ist bisher nur von der Theorie her behandelt worden. Die in dieser Arbeit gewählte mathematische Darstellungsform bietet dazu weitere Ansatzpunkte. Darüber hinaus werden Abschätzungen der Effektivität solcher Realisierungen gegeben.

Im letzten Kapitel werden die Methoden der schnellen Faltung auf die Berechnung des Zeitverhaltens linearer zeitinvarianter kontinuierlicher Systeme übertragen. Ausgangspunkt ist das von W. KLEIN angegebene Verfahren der "quantisierten Fourier-Transformation" [17]. Diesem Verfahren wird ein neues, verbessertes gegenübergestellt und seine Leistungsfähigkeit an Beispielen demonstriert.

Grundsätzlich wird im folgenden idealisierend vorausgesetzt, daß die Amplitudenwerte der Signale stetig veränderbar sind und auch stetig verarbeitet werden können. Die bei der digitalen Verarbeitung von Signalen auftretenden Quantisierungsfehler bleiben somit unberücksichtigt.

1. Die diskrete Fourier-Transformation

1.1 Definition

Einer Folge komplexer Zahlen

$$\{x_v\} = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\} \quad (1.1/1)$$

läßt sich durch die diskrete Fourier-Transformation

$$y_\mu = \kappa \sum_{v=0}^{N-1} x_v e^{-j\mu v 2\pi/N} \quad (1.1/2)$$

eindeutig umkehrbar eine komplexe Zahlenfolge der gleichen Länge

$$\{y_\mu\} = \{y_0, y_1, \dots, y_{N-1}\} \quad (1.1/3)$$

zuordnen. Dabei ist j die Einheit der imaginären Zahlen und κ eine reelle, positive Konstante. Die Umkehrtransformation zu (1.1/2)

$$x_v = \frac{1}{\kappa N} \sum_{\mu=0}^{N-1} y_\mu e^{j\mu v 2\pi/N} \quad (1.1/4)$$

wird als inverse diskrete Fourier-Transformation bezeichnet. Die Eindeutigkeit der Umkehrung läßt sich leicht nachweisen:

$$\begin{aligned} x_v &= \frac{1}{\kappa N} \sum_{\mu=0}^{N-1} e^{j\mu v 2\pi/N} \kappa \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\mu n 2\pi/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \sum_{\mu=0}^{N-1} e^{j\mu(v-n) 2\pi/N} \end{aligned} \quad (1.1/5)$$

Hierin kann man die innere Summe mit Hilfe der geometrischen Summenformel berechnen. Das Ergebnis

$$\sum_{\mu=0}^{N-1} e^{j\mu(v-n) 2\pi/N} = \frac{e^{j(v-n) 2\pi} - 1}{e^{j(v-n) 2\pi/N} - 1} \quad (1.1/6)$$

entspricht der Summen-Orthogonalität der harmonischen Funktionen:

$$\frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} e^{j\mu(v-n) 2\pi/N} = \begin{cases} 1 & \text{für } v-n = kN, k \text{ ganzzahlig} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.1/7)$$

Da der Wertebereich von v und n im vorliegenden Fall nur die ganzen Zahlen von 0 bis $N-1$ enthält, ist die Bedingung für Nichtverschwinden der Summe in (1.1/7) nur für $k=0$, d.h. $v=n$ erfüllt. Aus (1.1/5) folgt dann die Eindeutigkeit der Umkehrung.

Die Konstante κ wird im Fachschrifttum nicht einheitlich definiert. Gebräuchlich ist beispielsweise die Form [1]

$$\kappa := 1/N, \quad (1.1/8)$$

die sich unmittelbar aus der trigonometrischen Interpolation ergibt. (Vgl. Abschnitt 1.3).

Die Festlegung (z.B. [2])

$$\kappa := 1 \quad (1.1/9)$$

erweist sich als vorteilhaft, wenn man die diskrete Faltung mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation berechnet. (Vgl. Abschnitt 1.2). Schließlich kann man durch die Wahl

$$\kappa := 1/\sqrt{N} \quad (1.1/10)$$

erreichen, daß die Euklidische Norm invariant gegen die diskrete Fourier-Transformation ist. (Vgl. Abschnitt 1.2).

Bezüglich der Wahl von κ wird hier keine generelle Entscheidung für die folgenden Betrachtungen getroffen. Allgemein kennzeichnen wir die gegenseitige Zuordnung zweier Wertefolgen über die diskrete Fourier-Transformation nach (1.1/2) symbolisch durch

$$\{x_v\} \longleftrightarrow \{y_\mu\}.$$

Speziell wird gelegentlich im folgenden auch die von GOLD und RADER in [2] eingeführte Schreibweise für (1.1/2) bzw. (1.1/4), wo κ durch (1.1/9) festgelegt ist, verwendet werden:

$$\{y_\mu\} = \text{DFT} \{x_v\} := \left\{ \sum_{v=0}^{N-1} x_v e^{-j\mu v 2\pi/N} \right\} \quad (1.1/11)$$

$$\{x_v\} = \text{IDFT} \{y_\mu\} := \left\{ \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} y_\mu e^{j\mu v 2\pi/N} \right\} \quad (1.1/12)$$

Bei der vektoriellen Darstellung der diskreten Fourier-Transformation und ihrer Umkehrung, die im folgenden angegeben wird, verwenden wir grundsätzlich die Definition (1.1/10) für κ .

Wenn man die Zahlenfolgen $\{x_v\}$ und $\{y_v\}$ zu Spaltenvektoren $\underline{x}$ bzw. $\underline{y}$ zusammenfaßt, kann man die Transformationen (1.1/2) und (1.1/4) in der Form

$$\underline{y} = \underline{W} \underline{x} \quad (1.1/13)$$

$$\underline{x} = \underline{W}^{-1} \underline{y} \quad (1.1/14)$$

schreiben, in der die Matrix $\underline{W}$ der diskreten Fourier-Transformation und ihre Inverse $\underline{W}^{-1}$, wie folgt, definiert sind:

$$\underline{W} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \quad (1.1/15)$$

$$\underline{W}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w^{-1} & w^{-2} & \dots & w^{-(N-1)} \\ 1 & w^{-2} & w^{-4} & \dots & w^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{-(N-1)} & w^{-2(N-1)} & \dots & w^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \quad (1.1/16)$$

Dabei wurde zur Abkürzung die Größe

$$w = e^{-j2\pi/N} \quad (1.1/17)$$

eingeführt. Die Matrizen $\underline{W}$ und $\underline{W}^{-1}$ sind symmetrisch

$$\underline{W} = \underline{W}^T \quad (1.1/18)$$

$$\underline{W}^{-1} = (\underline{W}^{-1})^T \quad (1.1/19)$$

und außerdem zueinander konjugiert-komplex:

$$\underline{W}^{-1} = \underline{W}^* \quad (1.1/20)$$

Da somit $\underline{W}^{-1}$ die zu $\underline{W}$ adjungierte Matrix $\underline{W}^\dagger$

$$\underline{W}^{-1} = \underline{W}^\dagger \quad (1.1/21)$$

ist, folgt, daß $\underline{W}$ eine unitäre Matrix und die durch sie vermittelte Transformation eine unitäre Transformation ist.

1.2 Abbildungsgesetze

In der vektoriellen Darstellung (1.1/13) der diskreten Fourier-Transformation entsprechen $\underline{x}$ und $\underline{y}$ zwei Vektoren in einem N-dimensionalen komplexen Punktraum R_N . In diesem Raum ist das skalare Produkt zweier Vektoren $\underline{x}_1 \in R_N$ und $\underline{x}_2 \in R_N$ erklärt durch die komplexe Zahl

$$(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \underline{x}_1^\dagger \underline{x}_2 = (x_{10}^*, x_{11}^*, \dots, x_{1N-1}^*) \begin{bmatrix} x_{20} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{2N-1} \end{bmatrix} \\ = \sum_{v=0}^{N-1} x_{1v}^* x_{2v} \quad (1.2/1)$$

Eine Vertauschung in der Reihenfolge der Faktoren führt auf den zu (1.2/1) konjugiert-komplexen Zahlenwert

$$(\underline{x}_2, \underline{x}_1) = \underline{x}_2^\dagger \underline{x}_1 = \sum_{v=0}^{N-1} x_{2v}^* x_{1v} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2)^* \quad (1.2/2)$$

Das innere Produkt zweier Vektoren $\underline{x}_1 \in R_N$ und $\underline{x}_2 \in R_N$ ist invariant gegen die diskrete Fourier-Transformation:

$$(\underline{y}_1, \underline{y}_2) = (\underline{W} \underline{x}_1, \underline{W} \underline{x}_2) = (\underline{W} \underline{x}_1)^\dagger \underline{W} \underline{x}_2 = \\ = \underline{x}_1^\dagger \underline{W}^\dagger \underline{W} \underline{x}_2 = \underline{x}_1^\dagger \underline{x}_2 = (\underline{x}_1, \underline{x}_2) \quad (1.2/3)$$

Insbesondere folgt hieraus, daß die durch

$$||\underline{x}|| = \sqrt{(\underline{x}, \underline{x})} = \sqrt{\underline{x}^T \underline{x}} = \sqrt{\sum_{v=0}^{N-1} |x_v|^2} \quad (1.2/4)$$

erklärte Norm des Vektors $\underline{x} \in R_N$ bei der diskreten Fourier-Transformation erhalten bleibt:

$$||\underline{y}|| = ||\underline{W} \underline{x}|| = \sqrt{(\underline{W} \underline{x}, \underline{W} \underline{x})} = \sqrt{(\underline{x}, \underline{x})} = ||\underline{x}|| \quad (1.2/5)$$

Da R_N ein unitärer Raum ist (z.B. COLLATZ [4]), gelten außerdem für $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in R_N$ die SCHWARZsche Ungleichung

$$|(\underline{x}_1, \underline{x}_2)| \leq ||\underline{x}_1|| \cdot ||\underline{x}_2||, \quad (1.2/6)$$

die Dreiecksungleichung

$$||\underline{x}_1 + \underline{x}_2|| \leq ||\underline{x}_1|| + ||\underline{x}_2|| \quad (1.2/7)$$

und die Parallelogrammgleichung

$$||\underline{x}_1 + \underline{x}_2||^2 + ||\underline{x}_1 - \underline{x}_2||^2 = 2(||\underline{x}_1||^2 + ||\underline{x}_2||^2) \quad (1.2/8)$$

Diese Beziehungen lassen sich leicht beweisen. (Vgl. COLLATZ [4]).

Es sollen nun einige Beziehungen angegeben werden, die die wiederholte Ausführung der diskreten Fourier-Transformation betreffen. Zunächst betrachten wir die Matrix

$$\underline{W}^2 = (a_{1k}) \quad (1.2/9)$$

Bei der Quadrierung von (1.1/15) ergibt sich das Element in der i-ten Zeile und k-ten Spalte unter Berücksichtigung der Summen-Orthogonalität (1.1/7) zu

$$\begin{aligned} a_{1k} &= \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} w^{vi} w^{vk} = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} e^{-j2\pi v(1+k)/N} = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } 1+k=0 \\ 1 & \text{für } 1+k=N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2/10)$$

Hieraus folgt

$$a_{ok} = \delta_{ok} \quad (\text{Kroneckersymbol}) \quad (1.2/11)$$

und für $i \neq 0$

$$a_{ik} = \delta_{i, N-i} \quad (1.2/12)$$

Die Matrix $\underline{W}^2$ ist also eine Permutationsmatrix, die lediglich die Reihenfolge der Elemente des Vektors, auf den sie angewendet wird, invertiert, wobei jedoch das nullte Element des Vektors seinen Platz behält und gewissermaßen die Rolle des N-ten Elements übernimmt. Für $N=4$ gilt beispielsweise

$$\underline{W}^2 = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.2/13)$$

Diese Eigenschaft der diskreten Fourier-Transformation hat ein Analogon bei der Fourier-Transformation kontinuierlicher Funktionen. Die zweimalige Anwendung des Fourier-Operators $\mathcal{F}$ (vgl. Abschnitt 1.3) auf eine Funktion $g(t)$ bewirkt nur eine Vorzeichenumkehr beim Argument:

$$\mathcal{F}^2 \{g(t)\} = g(-t) \quad (1.2/14)$$

Weiterhin gilt sowohl bei der diskreten Fourier-Transformation wie auch bei der Fourier-Transformation kontinuierlicher Funktionen, daß die viermalige Anwendung des Operators $\mathcal{F}$ bzw. $\underline{W}$ dem Identitätsoperator entspricht. Im Falle der diskreten Fourier-Transformation folgt das daraus, daß $\underline{W}^4$ als Quadrat einer Permutationsmatrix gleich der Einheitsmatrix $\underline{E}$ sein muß:

$$\underline{W}^4 = (\underline{W}^2)^2 = \underline{E} \quad (1.2/15)$$

$\underline{W}$ ist also zyklisch vom vierten Grade.

Hieraus folgt weiterhin

$$\underline{W}^3 = \underline{W}^{-1} = \underline{W}^\dagger = \underline{W}^* \quad (1.2/16)$$

und

$$\underline{W}^{4n} = \underline{E}, \quad n \text{ ganzzahlig.} \quad (1.2/17)$$

Entsprechendes gilt für die inverse diskrete Fourier-Transformation.

Wir übertragen nun die für die Matrix $\underline{W}$ hergeleiteten Eigenschaften auf ihren Realteil und ihren Imaginärteil. Mit

$$\underline{W} = \underline{U} + j \underline{V} \quad (1.2/18)$$

läßt sich die unitäre Matrix $\underline{W}$ in zwei reelle symmetrische Matrizen

$$\underline{U} = (u_{ik}) = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \cos 2\pi ik/N \right) = \underline{U}' \quad (1.2/19)$$

und

$$\underline{V} = (v_{ik}) = \left(-\frac{1}{\sqrt{N}} \sin 2\pi ik/N \right) = \underline{V}' \quad (1.2/20)$$

zerlegen. Wir bilden

$$\begin{aligned} \underline{W}^\dagger \underline{W} &= (\underline{U} + j \underline{V})^\dagger (\underline{U} + j \underline{V}) = \\ &= \underline{U}^2 + \underline{V}^2 + j(\underline{U} \underline{V} - \underline{V} \underline{U}) = \underline{E} \end{aligned} \quad (1.2/21)$$

und erhalten hieraus mit

$$\underline{U}^2 + \underline{V}^2 = \underline{E} \quad (1.2/22)$$

$$\underline{U} \underline{V} = \underline{V} \underline{U} \quad (1.2/23)$$

zwei Eigenschaften, die allgemein für Realteil und Imaginärteil unitärer symmetrischer Matrizen gelten. (Vgl. GANTMACHER [5]). Darüberhinaus verschwindet speziell für die Matrix der diskreten Fourier-Transformation das Produkt von Realteil und Imaginärteil:

$$\begin{aligned} \underline{U} \underline{V} &= \frac{1}{4j} \left[(\underline{U} + j \underline{V})^2 - (\underline{U} - j \underline{V})^2 \right] = \\ &= \frac{1}{4j} \left[\underline{W}^2 - \underline{W}^{*2} \right] \end{aligned} \quad (1.2/24)$$

Da $\underline{W}^2$ eine reelle Matrix ist, folgt

$$\underline{U} \underline{V} = \underline{V} \underline{U} = \underline{0} . \quad (1.2/25)$$

Somit gilt

$$\underline{W}^2 = (\underline{U} + j \underline{V})^2 = \underline{U}^2 - \underline{V}^2 \quad (1.2/26)$$

und mit (1.2/16) weiterhin

$$\underline{W}^3 = \underline{U}^3 - j \underline{V}^3 = \underline{W}^\dagger = \underline{U} - j \underline{V} . \quad (1.2/27)$$

Hieraus ergeben sich die Beziehungen

$$\underline{U}^3 = \underline{U} \quad (1.2/28)$$

$$\underline{V}^3 = \underline{V} . \quad (1.2/29)$$

Es soll nun noch gezeigt werden, wie Real- und Imaginärteil, gerader und ungerader Anteil einer Folge mit den entsprechenden Größen der diskreten Fourier-Transformierten dieser Folge verknüpft sind. Als "gerade" bezeichnen wir eine Folge $\{x_v\}$, wenn für den zugeordneten Vektor $\underline{x}$ die Relation

$$\underline{x} = \underline{W}^2 \underline{x} \quad (1.2/30)$$

gilt, als "ungerade", wenn

$$\underline{x} = - \underline{W}^2 \underline{x} \quad (1.2/31)$$

ist. Wir können dann jede Folge mit

$$\underline{x}_g = \frac{1}{2} (\underline{x} + \underline{W}^2 \underline{x}) \quad (1.2/32)$$

$$\underline{x}_u = \frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{W}^2 \underline{x}) \quad (1.2/33)$$

in einen geraden und einen ungeraden Anteil zerlegen. Für den geraden und ungeraden Anteil der diskreten Fourier-Transformierten

$$\underline{y} = \underline{W} \underline{x} \quad (1.2/34)$$

gilt dann

$$Y_g = \frac{1}{2}(Y + W^2 Y) = \frac{1}{2}(W x + W^3 x) = W x_g \quad (1.2/35)$$

$$Y_u = \frac{1}{2}(Y - W^2 Y) = \frac{1}{2}(W x - W^3 x) = W x_u, \quad (1.2/36)$$

d.h. die diskrete Fourier-Transformierte einer geraden (ungeraden) Folge ist wieder eine gerade (ungerade) Folge. Wir wollen nun untersuchen, wie die Real- und Imaginärteile

$$x_{gr} := \operatorname{Re}(x_g) = \frac{1}{2} (x_g + x_g^*) \quad (1.2/37)$$

$$x_{gi} := \operatorname{Im}(x_g) = \frac{1}{2j} (x_g - x_g^*) \quad (1.2/38)$$

$$x_{ur} := \operatorname{Re}(x_u) = \frac{1}{2} (x_u + x_u^*) \quad (1.2/39)$$

$$x_{ui} := \operatorname{Im}(x_u) = \frac{1}{2j} (x_u - x_u^*) \quad (1.2/40)$$

transformiert werden. Aus (1.2/30) bis (1.2/40) folgt bei Berücksichtigung von (1.2/16):

$$\begin{aligned} Y_{gr} &:= \frac{1}{2}(Y_g + Y_g^*) = \frac{1}{2}(W x_g + W^* x_g^*) = \\ &= \frac{1}{2}(W x_g + W^3 x_g^*) = \frac{1}{2} W (x_g + x_g^*) = W x_{gr} \end{aligned} \quad (1.2/41)$$

Entsprechend ergibt sich wegen $W^2 x_g^* = x_g^*$

$$Y_{gi} := \frac{1}{2j}(Y_g - Y_g^*) = \frac{1}{2j} W (x_g - x_g^*) = W x_{gi}. \quad (1.2/42)$$

Für den ungeraden Anteil gilt

$$\begin{aligned} Y_{ur} &:= \frac{1}{2}(Y_u + Y_u^*) = \frac{1}{2}(W x_u + W^* x_u^*) = \\ &= \frac{1}{2}(W x_u + W^3 x_u^*) = \frac{1}{2} W (x_u - x_u^*) = j W x_{ui} \end{aligned} \quad (1.2/43)$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} Y_{ui} &:= \frac{1}{2j}(Y_u - Y_u^*) = \frac{1}{2j} W (x_u - x_u^*) = \\ &= \frac{1}{2j} W (x_u - W^3 x_u^*) = \frac{1}{2j} W (x_u + x_u^*) = -j W x_{ur}. \end{aligned} \quad (1.2/44)$$

Die Verknüpfung der einzelnen Anteile durch die diskrete Fourier-Transformation läßt sich symbolisch folgendermaßen darstellen:

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{x} & = & \underline{x}_{gr} & + & \underline{x}_{ur} & + & j\underline{x}_{gi} & + & j\underline{x}_{ui} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \underline{y} & = & \underline{y}_{gr} & + & \underline{y}_{ur} & + & j\underline{y}_{gi} & + & j\underline{y}_{ui} \end{array} \quad (1.2/45)$$

Die sich hieraus ergebenden Folgerungen für spezielle Datenfolgen sind in Tabelle 1.1 zusammengestellt.

Tabelle 1.1 Korrespondenzen der DFT

$\begin{array}{c} \underline{y} \\ \underline{x} \end{array}$	reell, gerade	reell, ungerade	rein imaginär, gerade	rein imaginär, ungerade
reell, gerade	X			
reell, ungerade				X
rein imaginär, gerade			X	
rein imaginär, ungerade		X		

Auch hier findet man Übereinstimmung mit entsprechenden Eigenschaften der Fourier-Transformation kontinuierlicher Funktionen. (Vgl. z.B. DOETSCH [7]).

Schließlich kann man noch dem Faltungssatz und dem Differentiationsatz der Fourier-Transformation entsprechende Sätze der diskreten Fourier-Transformation angeben.

Die zyklische diskrete Faltung zweier Wertefolgen $\{\alpha_v\}$ und $\{\beta_v\}$ gleicher Länge ($v = 0, 1, \dots, N-1$) führt auf eine Wertefolge $\{\gamma_v\}$, die ebenfalls aus N Werten besteht. Die Operation, welche diese Wertefolgen verknüpft, läßt sich in Matrizenform darstellen;

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ . \\ \gamma_{N-2} \\ \gamma_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_{N-1} & \alpha_{N-2} & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{N-1} & \dots & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & \alpha_4 & \alpha_3 \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{N-2} & \alpha_{N-3} & \alpha_{N-4} & \dots & \alpha_0 & \alpha_{N-1} \\ \alpha_{N-1} & \alpha_{N-2} & \alpha_{N-3} & \dots & \alpha_1 & \alpha_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ \beta_{N-2} \\ \beta_{N-1} \end{bmatrix} \quad (1.2/46)$$

Wir kennzeichnen diesen Zusammenhang symbolisch durch

$$\{\gamma_v\} = \{\alpha_v\} \tilde{*} \{\beta_v\} . \quad (1.2/47)$$

Da die sinngemäße Vertauschung der Wertefolgen $\{\alpha_v\}$ und $\{\beta_v\}$ in (1.2/46) offensichtlich das Ergebnis der Faltungsoperation nicht ändert, gilt

$$\{\alpha_v\} \tilde{*} \{\beta_v\} = \{\beta_v\} \tilde{*} \{\alpha_v\} . \quad (1.2/48)$$

Der für das folgende überaus wichtige Faltungssatz der diskreten Fourier-Transformation besagt nun, daß die diskrete Fourier-Transformierte einer Folge $\{\gamma_v\}$, die durch zyklische diskrete Faltung aus zwei Folgen $\{\alpha_v\}$ und $\{\beta_v\}$ hervorgeht, einer Folge entspricht, welche durch Multiplikation entsprechender Elemente der diskreten Fourier-Transformierten von $\{\alpha_v\}$ und $\{\beta_v\}$ entsteht ([1] - [3], [11] - [16]):

$$\{A_v\} := \text{DFT } \{\alpha_v\} \quad (1.2/49)$$

$$\{B_v\} := \text{DFT } \{\beta_v\} \quad (1.2/50)$$

$$\{\gamma_v\} = \text{IDFT } \{A_v B_v\} \quad (1.2/51)$$

Dieser Zusammenhang läßt sich unmittelbar aus den Eigenschaften der Matrix in (1.2/46)

$$\underline{C} := \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_{N-1} & \alpha_{N-2} & \dots & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_{N-1} & \dots & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \dots & \alpha_4 & \alpha_3 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ \alpha_{N-2} & \alpha_{N-3} & \alpha_{N-4} & \dots & \alpha_0 & \alpha_{N-1} \\ \alpha_{N-1} & \alpha_{N-2} & \alpha_{N-3} & \dots & \alpha_1 & \alpha_0 \end{bmatrix} \quad (1.2/52)$$

herleiten. Es handelt sich hier um eine Matrix zyklischer Bauart (z.B. [6]), die dadurch gekennzeichnet ist, daß alle Zeilen sukzessive durch zyklische Vertauschung der Elemente aus der ersten Zeile hervorgehen. So sind alle Diagonalen jeweils mit gleichen Elementen besetzt, und das erste Element einer Zeile stimmt mit dem letzten Element der vorhergehenden Zeile überein. Matrizen dieser Art sind diagonalisierbar und dadurch ausgezeichnet, daß man ihre Eigenvektoren und Eigenwerte generell angeben kann [6]. Die Eigenvektoren $\underline{a}_k$ sind in normierter Form gegeben durch

$$\underline{a}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{jk2\pi/N} \\ e^{j2k2\pi/N} \\ . \\ . \\ e^{j(N-1)k2\pi/N} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} w^0 \\ w^{-k} \\ w^{-2k} \\ . \\ . \\ w^{-(N-1)k} \end{bmatrix} \quad (1.2/53)$$

mit $k = 0, 1, \dots, N-1$. Die Definition von w ist durch (1.1/17) gegeben. Für die Eigenwerte λ_k gilt

$$\lambda_k = \sum_{v=1}^N \alpha_{N-v} e^{jkv2\pi/N} = \sum_{v=1}^N \alpha_{N-v} w^{-kv} \quad (1.2/54)$$

Daß die $\underline{a}_k$ und λ_k tatsächlich Lösungen des Eigenwertproblems

$$\underline{C} \underline{a}_k = \lambda_k \underline{a}_k \quad (1.2/55)$$

sind, kann man zeilenweise leicht nachprüfen:

$$(\alpha_\mu, \alpha_{\mu-1}, \alpha_{\mu-2}, \dots, \alpha_0, \alpha_{N-1}, \dots, \alpha_{\mu+1}) \cdot \underline{a}_k =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{v=0}^{\mu} \alpha_{\mu-v} e^{jvk2\pi/N} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{v=\mu+1}^{N-1} \alpha_{N-v+\mu} e^{jvk2\pi/N} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{v=N-\mu}^N \alpha_{N-v} e^{j(v+\mu-N)k2\pi/N} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{v=1}^{N-\mu-1} \alpha_{N-v} e^{j(v+\mu)k2\pi/N} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{v=1}^N \alpha_{N-v} e^{j(v+\mu)k2\pi/N} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\mu k2\pi/N} \cdot \lambda_k
 \end{aligned}$$

Wir fassen die Eigenvektoren $\underline{a}_k$ spaltenweise zur Modalmatrix

$$\underline{M} = (\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{N-1}) \quad (1.2/56)$$

zusammen und ersehen aus dem Vergleich von (1.2/53) mit (1.1/16), daß $\underline{M}$ der Matrix $\underline{W}^{-1}$ der inversen Fourier-Transformation entspricht. Die Matrix $\underline{C}$ der zyklischen Faltung läßt sich also durch eine Ähnlichkeitstransformation mit der unitären Matrix $\underline{W}^{-1}$ diagonalisieren:

$$\underline{M}^{-1} \underline{C} \underline{M} = \underline{W} \underline{C} \underline{W}^{-1} = \underline{\Lambda} = \text{Diag}(\lambda_k) \quad (1.2/57)$$

Aus (1.2/54) folgt weiterhin, daß die Eigenwerte λ_k der diskreten Fourier-Transformierten der Folge $\{\alpha_v\}$ entsprechen:

$$\begin{aligned}
 \lambda_k &= \sum_{v=1}^N \alpha_{N-v} e^{jkv2\pi/N} = \sum_{v=0}^{N-1} \alpha_v e^{jk(N-v)2\pi/N} = \\
 &= \sum_{v=0}^{N-1} \alpha_v e^{-jkv2\pi/N} = \sum_{v=0}^{N-1} \alpha_v W^{kv}
 \end{aligned} \quad (1.2/58)$$

Wir interpretieren nun die Folgen $\{\alpha_v\}$, $\{\beta_v\}$ und $\{\gamma_v\}$ als Elemente der Spaltenvektoren $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ bzw. $\underline{\gamma}$ und fassen weiterhin die Eigenwerte λ_k zum Spaltenvektor $\underline{\lambda}$ zusammen. Die zyklische diskrete Faltung (1.2/46) läßt sich dann in der Vektorgleichung

$$\underline{\gamma} = \underline{C} \underline{\beta} \quad (1.2/59)$$

darstellen, und aus (1.2/57) folgt

$$\underline{\gamma} = \underline{C} \underline{\beta} = \underline{W}^{-1} \underline{\Lambda} \underline{W} \underline{\beta}, \quad (1.2/60)$$

wobei die Hauptdiagonale von $\underline{\Lambda}$ durch die Elemente des Spaltenvektors

$$\underline{\lambda} = N \underline{W} \underline{\alpha} \quad (1.2/61)$$

in der gleichen Reihenfolge besetzt ist. Beachtet man, daß entsprechend den in Abschnitt 1.1 gegebenen Definitionen die Operationen DFT und IDFT äquivalent sind zur Multiplikation mit $\sqrt{N} \underline{W}$ bzw. $\frac{1}{\sqrt{N}} \underline{W}^{-1}$, so folgen aus (1.2/60) und (1.2/61) die Beziehungen (1.2/49) bis (1.2/51).

Über den Zusammenhang zwischen dem Differentiationssatz der Fourier-Transformation und entsprechenden Beziehungen für die diskrete Fourier-Transformation wird im 4. Abschnitt berichtet. Hier soll nur noch gezeigt werden, daß auch die Invarianz des Operators $\left[\frac{d^2}{d\omega^2} - \omega^2 \right]$ gegen die Fourier-Transformation (z.B. [18]) ein Analogon bei der diskreten Fourier-Transformation findet. Wir ersetzen dazu den zweiten Differentialquotienten im wesentlichen durch die Differenz 2. Ordnung

$$\Delta^{(2)} x_v = x_{v-1} - 2x_v + x_{v+1} . \quad (1.2/62)$$

In Matrizendarstellung lautet diese Operation:

$$\underline{\Delta}^{(2)} \underline{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \quad (1.2/63)$$

Da $\underline{\Delta}^{(2)}$ eine Matrix zyklischer Bauart ist, läßt sie sich mit

$$\underline{W} \underline{\Delta}^{(2)} \underline{W}^{-1} = \underline{D}^{(2)} = \text{Diag}(d_v^{(2)}) \quad (1.2/64)$$

diagonalisieren. Die Eigenwerte $d_v^{(2)}$ sind sinngemäß nach (1.2/54) durch

$$d_v^{(2)} = e^{jv2\pi/N} + e^{-jv2\pi/N} - 2 = 2(\cos v2\pi/N - 1) \\ v = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.2/65)$$

gegeben. Wie im Abschnitt 4.2 gezeigt wird, sind diese Eigenwerte im wesentlichen das diskrete Analogon zu $(-\omega^2)$, wobei ω die Kreisfrequenz ist. Die Fragestellung der Invarianz des Operators

$(\underline{\Delta}^{(2)} + \underline{D}^{(2)})$ gegen die diskrete Fourier-Transformation liegt somit nahe. Zunächst folgt aus der Symmetrie der Eigenwerte

$$d_v^{(2)} = d_{N-v}^{(2)}, \quad (1.2/66)$$

daß die Diagonalmatrix $\underline{D}^{(2)}$ mit der Permutationsmatrix $\underline{W}^2$ vertauschbar ist.

$$\underline{W}^2 \underline{D}^{(2)} = \underline{D}^{(2)} \underline{W}^2 \quad (1.2/67)$$

Weiterhin ergibt sich aus (1.2/64) die Relation

$$\underline{W} \underline{\Delta}^{(2)} = \underline{D}^{(2)} \underline{W}, \quad (1.2/68)$$

die in Verbindung mit (1.2/67) auf

$$\underline{W} \underline{D}^{(2)} = \underline{W}^2 \underline{\Delta}^{(2)} \underline{W}^{-1} = \underline{\Delta}^{(2)} \underline{W} \quad (1.2/69)$$

führt. Die Addition der Gleichungen (1.2/68) und (1.2/69) beweist die Invarianz des Operators $(\underline{\Delta}^{(2)} + \underline{D}^{(2)})$ gegen die diskrete Fourier-Transformation:

$$\underline{W} \{ \underline{\Delta}^{(2)} + \underline{D}^{(2)} \} = \{ \underline{\Delta}^{(2)} + \underline{D}^{(2)} \} \underline{W} \quad (1.2/70)$$

Diese Beziehung kann man durch wiederholte Multiplikation mit $\underline{W}$ auf

$$\underline{W}^n \{ \underline{\Delta}^{(2)} + \underline{D}^{(2)} \} = \{ \underline{\Delta}^{(2)} + \underline{D}^{(2)} \} \underline{W}^n, \quad n \text{ ganzzahlig} \quad (1.2/71)$$

verallgemeinern, wobei die Gültigkeit für negative Werte von n aus $\underline{W}^3 = \underline{W}^{-1}$ folgt.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß in den Abbildungsgesetzen wesentliche Korrespondenzen zwischen der Fourier-Transformation und der diskreten Fourier-Transformation bestehen. Der Zusammenhang zwischen den Transformationen selbst wird in den folgenden Abschnitten erörtert.

1.3 Trigonometrische Interpolation

Die der diskreten Fourier-Transformation ursprünglich zugrundeliegende Aufgabenstellung war die numerische Durchführung der harmonischen Analyse. Beim Problem der harmonischen Analyse handelt es sich darum, eine i. a. komplexe, periodische Funktion

$$g(t) = g(t + \tau) \quad (1.3/1)$$

einer reellen Variablen t durch eine endliche Summe von harmonischen Funktionen im Sinne der mittleren Approximation anzunähern:

$$\int_0^{\tau} \{g(t) - \sum_{\mu} c_{\mu} e^{j\mu 2\pi t/\tau}\}^2 dt \stackrel{!}{=} \text{Min} \quad (1.3/2)$$

Dieses Problem wird bekanntlich (z.B. [8]) unabhängig von der Anzahl der Summenglieder gelöst durch die entsprechenden Koeffizienten

$$c_{\mu} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} g(t) e^{-j\mu 2\pi t/\tau} dt \quad (1.3/3)$$

der Fourierschen Reihenentwicklung von $g(t)$.

Die numerische Behandlung des Problems erfordert zunächst die Beschränkung auf eine endliche Anzahl N von diskreten Funktionswerten

$$g_v = g(t_v) , \quad (1.3/4)$$

die man dem Periodizitätsintervall $[0, \tau]$ zweckmäßigerweise in äquidistanten Abständen T

$$t_v = vT = v\tau/N , \quad v = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.3/5)$$

entnimmt. Eine solche Diskretisierung der Funktion $g(t)$ wird jedoch nicht erst beim Ergebnis (1.3/3) der harmonischen Analyse, etwa durch Anwendung eines numerischen Integrationsverfahrens, sondern bereits bei der Problemstellung (1.3/2) vorgenommen, die nun im Sinne einer diskreten Approximation abgeändert wird:

$$Q = \sum_{v=0}^{N-1} \{g(t_v) - \sum_{\mu} \tilde{c}_{\mu} e^{j\mu 2\pi t_v/\tau}\}^2 \stackrel{!}{=} \text{Min} \quad (1.3/6)$$

Die sich hieraus ergebenden notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial Q}{\partial \tilde{c}_m} = 2 \sum_{v=0}^{N-1} \{g_v - \sum_{\mu} \tilde{c}_{\mu} e^{j2\pi\mu v/N}\} e^{j2\pi m v/N} = 0 \quad (1.3/7)$$

sind die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten $\tilde{c}_{\mu}$. Man sieht jedoch, daß (1.3/7) wegen

$$\frac{\partial Q}{\partial \tilde{c}_m} = \frac{\partial Q}{\partial \tilde{c}_{m+N}} \quad (1.3/8)$$

nur N unabhängige Gleichungen enthalten kann. Es sind daher nur N der Koeffizienten $\tilde{c}_m$ bestimmbar, deren Indizes (mod N)-verschieden sein müßten. Wir wählen die kleinsten nicht-negativen Ordnungszahlen

$$m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.3/9)$$

und erhalten aus (1.3/7) das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{\mu=0}^{N-1} \tilde{c}_{\mu} \sum_{v=0}^{N-1} e^{j2\pi(\mu+m)v/N} = \sum_{v=0}^{N-1} g_v e^{j2\pi m v/N} \quad (1.3/10)$$

Wegen der Summenorthogonalität (1.1/10) ergibt die innere Summe auf der linken Seite nur für

$$\mu+m = kN, \quad k \text{ ganzzahlig} \quad (1.3/11)$$

den Wert N und verschwindet im Übrigen. Die Bedingung (1.3/11) ist hier für $k=0$ und $k=1$ erfüllbar. Im ersten Fall erhält man

$$N \tilde{c}_0 = \sum_{v=0}^{N-1} g_v \quad (1.3/12)$$

Für $k=1$ gilt $\mu=N-m$. Die Gleichungen (1.3/10) reduzieren sich dann auf

$$\begin{aligned} N \tilde{c}_{\mu} &= \sum_{v=0}^{N-1} g_v e^{j2\pi(N-\mu)v/N} = \\ &= \sum_{v=0}^{N-1} g_v e^{-j2\pi\mu v/N}, \quad \mu = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (1.3/13)$$

Faßt man die Gleichungen (1.3/12) und (1.3/13) zusammen, so gilt

$$\tilde{c}_\mu = \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} g_\nu e^{-j2\pi\mu\nu/N}, \quad \mu = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.3/14)$$

Durch Einsetzen dieses Ergebnisses in die Gleichungen (1.3/7) läßt sich bei Beachtung der Summen-Orthogonalität leicht zeigen, daß die Approximation (1.3/6) zur exakten Interpolation wird:

$$g_\nu = \sum_{\mu=0}^{N-1} \tilde{c}_\mu e^{j2\pi\mu\nu/N}, \quad \nu = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.3/15)$$

Man spricht deshalb von trigonometrischer Interpolation [8]. Ein Vergleich mit (1.1/2) und (1.1/7) zeigt, daß die Folgen $\{\tilde{c}_\mu\}$ und $\{g_\nu\}$ einander im Sinne der diskreten Fourier-Transformation zugeordnet sind, wenn die Konstante κ durch (1.1/4) festgelegt wird.

Die Periodizität (1.3/8) läßt mit

$$\tilde{c}_\mu = \tilde{c}_{\mu+kN}, \quad k \text{ ganzzahlig} \quad (1.3/16)$$

eine Erweiterung des Definitionsbereiches der Koeffizienten $\tilde{c}_\mu$ zu. Diese Erweiterung ist hinsichtlich des Approximationsproblems (1.3/6) bedeutungslos, da es bereits exakt durch das Interpolationspolynom (1.3/15) gelöst wird und durch Hinzufügen weiterer Interpolationspolynome keine Verbesserung mehr erreicht werden kann. Sie ist jedoch aus physikalischen Gründen sinnvoll, wenn man die Gesamtheit der Koeffizienten $\tilde{c}_\mu$ als das numerisch gewonnene Spektrum einer periodischen Funktion $g(t)$ interpretiert, weil dann ein Vergleich mit dem durch die Fourier-Koeffizienten c_μ repräsentierten exakten Spektrum im gesamten Spektralbereich möglich ist.

1.4 Beziehungen zur Fourier-Transformation stetiger Funktionen

Zunächst soll der Zusammenhang zwischen den Fourier-Koeffizienten c_μ einer stetigen periodischen Funktion $g(t) = g(t+\tau)$ und den Koeffizienten $\tilde{c}_\mu$ der trigonometrischen Interpolation von N äquidistanten Stützwerten der gleichen Funktion untersucht werden. Neben der Stetigkeit fordern wir zur vollständigen Erfüllung der DIRICHLETSchen Bedingungen (z.B. [9]) die Zerlegbarkeit des Periodizitätsintervalles von $g(t)$ in endlich viele Teilintervalle, derart, daß $g(t)$ in jedem Teilintervall monoton ist. Die Fourier-Reihe von $g(t)$ konvergiert

unter diesen Voraussetzungen absolut, und es gilt

$$g(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j\mu \frac{2\pi}{T} t}, \quad (1.4/1)$$

wobei die Fourier-Koeffizienten durch (1.3/3) definiert sind. Für die bei der trigonometrischen Interpolation zu verwendenden N Äquidistanten Stützwerte gilt dann entsprechend

$$g_v = g(vT/N) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j2\pi\mu v/N}, v = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.4/2)$$

Wir bilden nun nach (1.3/14) die Koeffizienten der trigonometrischen Interpolation und erhalten mit (1.4/2):

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} g_v e^{-j2\pi n v/N} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} e^{j2\pi v(\mu-n)/N} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} c_{\mu} \sum_{v=0}^{N-1} e^{j2\pi v(\mu-n)/N} \end{aligned} \quad (1.4/3)$$

Wegen der Summen-Orthogonalität (1.1/10) folgt hieraus die gesuchte Beziehung zwischen den Fourier-Koeffizienten und den Koeffizienten der trigonometrischen Interpolation:

$$\tilde{c}_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n+kN} \quad (1.4/4)$$

Die Koeffizienten $\tilde{c}_n$ ergeben sich hiernach aus der Überlagerung von i. a. unendlich vielen Fourier-Koeffizienten, deren Ordnungszahl um ganzzahlige Vielfache von N gegenüber n verschoben ist. Dieser Zusammenhang, der auch wieder die Periodizität der $\tilde{c}_n$ erkennen läßt, ist ein Spezialfall des sogenannten Überlagerungssatzes der Fourier-Transformation für periodische Funktionen (F.L. BAUER und H.J. STETTER [10]).

Für spektral begrenzte periodische Funktionen, deren Fourier-Koeffizienten von einer endlichen Ordnungszahl M ab verschwinden

$$c_m = 0 \quad \text{für } |m| \geq M, \quad (1.4/5)$$

gilt dem Abtasttheorem entsprechend, daß bei hinreichend dichter Abtastung ($N \geq 2M$) die nicht-verschwindenden Fourier-Koeffizienten

sich exakt aus den Koeffizienten der trigonometrischen Interpolation durch Ausblenden des Bandes $|n| \leq N/2$ ergeben.

Die numerische Berechnung der Fourier-Transformation nichtperiodischer Funktionen $g(t)$ kann man auf die trigonometrische Interpolation zurückführen, indem man eine geeignete periodische Funktion erzeugt, die innerhalb eines (hinreichend groß gewählten) Periodizitätsintervalles den signifikanten Verlauf von $g(t)$ approximiert. Im einfachsten Fall geschieht das durch periodische Fortsetzung eines endlich breiten Ausschnittes von $g(t)$. Die damit verbundene Vernachlässigung des Funktionsverlaufes von $g(t)$ außerhalb des Periodizitätsintervalles ist neben der Diskretisierung eine zusätzliche Fehlerquelle, die sich dahingehend auswirkt, daß man letztlich nicht die Fourier-Transformierte von $g(t)$ sondern ihr Faltungsprodukt mit einer $\sin x/x$ -förmigen Fensterfunktion numerisch berechnet.

Ein interessanter Zusammenhang zwischen der Fourier-Transformation nichtperiodischer stetiger Funktionen $g(t)$ und der diskreten Fourier-Transformation ergibt sich, wenn man aus $g(t)$ eine stetige periodische Funktion

$$\tilde{g}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t+k\tau) \quad (1.4/6)$$

der Periode τ durch Überlagerung erzeugt. Dazu muß gefordert werden, daß die Reihe (1.4/6) ^{bezüglich t} gleichmäßig konvergiert. Das Periodizitätsintervall von $\tilde{g}(t)$ soll außerdem in endlich viele Teilintervalle zerlegbar sein, so daß $\tilde{g}(t)$ in jedem Teilintervall monoton ist. Die Funktion $\tilde{g}(t)$ ist dann in jedem Punkt t durch ihre Fourier-Reihe eindeutig darstellbar, und es gilt der Überlagerungssatz (1.4/4).

Man kann nun zeigen, daß die Fourier-Koeffizienten von $\tilde{g}(t)$ sich durch Abtastung aus der Fourier-Transformierten von $g(t)$ gewinnen lassen. Dazu muß die Existenz der Fourier-Transformierten

$$G(f) = \mathcal{F}\{g(t)\} := \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.4/7)$$

vorausgesetzt werden. Für die Umkehrung gilt

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(f)\} := \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (1.4/8)$$

Wir betrachten nun die Fourier-Transformierte $G(f)$ an den äquidistanten Stellen

$$f = f_m := m \cdot \frac{1}{\tau}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.4/9)$$

Unter den genannten Voraussetzungen gilt:

$$\begin{aligned} G(m/\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi mt/\tau} dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} g(t) e^{-j2\pi mt/\tau} dt = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} g(\vartheta + k\tau) e^{-j2\pi m(\vartheta + k\tau)/\tau} d\vartheta = \\ &= \int_0^{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(\vartheta + k\tau) e^{-j2\pi m\vartheta/\tau} d\vartheta \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit (1.4/6), daß $\frac{1}{\tau} G(m/\tau)$ dem m -ten Fourier-Koeffizienten

$$\frac{1}{\tau} G(m/\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \tilde{g}(\vartheta) e^{-j2\pi m\vartheta/\tau} d\vartheta \quad (1.4/10)$$

der Fourier-Reihe von $\tilde{g}(t)$

$$\tilde{g}(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(m/\tau) e^{j2\pi mt/\tau} \quad (1.4/11)$$

entspricht. Schreiben wir diese Beziehung etwas ausführlicher

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t+k\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi mt/\tau} \int_{-\infty}^{\infty} g(\vartheta) e^{-j2\pi m\vartheta/\tau} d\vartheta, \quad (1.4/12)$$

so erkennt man, daß sie eine erweiterte Form der POISSONschen Summenformel darstellt, aus der die bekannte Form speziell für $t = 0$ und $\tau = 2\pi$ folgt (z.B. [30]). Ähnliche Darstellungen dieses Zusammenhangs findet man auch bei R. UNBEHAUEN [27].

Wir unterteilen nun die Periode von $\tilde{g}(t)$ in N gleiche Intervalle und führen eine trigonometrische Interpolation der Stützwerte $\tilde{g}(v\tau/N)$ mit $v = 0, 1, \dots, N-1$ durch. Die Koeffizienten dieser tri-

gonometrischen Interpolation

$$\tilde{c}_\mu = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} \tilde{g}(v\tau/N) e^{-j2\pi\mu v/N} \quad (1.4/13)$$

sind mit den Fourier-Koeffizienten von $g(t)$ durch den Überlagerungs-
satz (1.4/4) verknüpft:

$$\tilde{c}_\mu = \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G((\mu+kN)/\tau) \quad (1.4/14)$$

Daraus ergibt sich der Zusammenhang

$$\frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G((\mu+kN)/\tau) = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} e^{-j2\pi\mu v/N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g((v+kN)\frac{\tau}{N}) \quad , \quad (1.4/15)$$

durch den die in ersichtlicher Weise periodisierte und abgetastete
Funktion $g(t)$ einerseits und ihre ebenfalls entsprechend periodi-
sierte und abgetastete Fourier-Transformierte $G(f)$ andererseits
als diskrete Fourier-Transformierte einander zugeordnet sind:

$$\left\{ \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G((\mu+kN)/\tau) \right\} = \text{DFT} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g((v+kN)\frac{\tau}{N}) \right\} \quad (1.4/16)$$

Aus diesem allgemeinen Zusammenhang zwischen Fourier-Transformation
und diskreter Fourier-Transformation läßt sich als interessante
Anwendung eine Möglichkeit zur Bestimmung der Eigenvektoren von $\underline{W}$
gewinnen. Eigenfunktionen der Fourier-Transformation sind bekannt-
lich (z.B. [18]) die HERMITESchen Funktionen

$$\psi_n(x) = \frac{H_n(x) e^{-x^2/2}}{\sqrt{n!} 2^n \sqrt{\pi}} \quad , \quad (1.4/17)$$

die sich für $n = 0, 1, 2, \dots$ als Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \psi_n}{dx^2} + (2n + 1 - x^2) \psi_n = 0 \quad (1.4/18)$$

ergeben. Die HERMITESchen Polynome $H_n(x)$ lassen sich durch

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (1.4/19)$$

darstellen und genügen der Rekursionsformel

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x) \quad (1.4/20)$$

Es gilt beispielsweise

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2. \quad (1.4/21)$$

Aus (1.4/20) folgt mit (1.4/17) eine Rekursionsformel für die Hermiteschen Funktionen:

$$\psi_{n+1}(x) = x \sqrt{\frac{2}{n+1}} \psi_n(x) - \sqrt{\frac{n}{n+1}} \psi_{n-1}(x) \quad (1.4/22)$$

Die Beziehung (1.4/16) besagt nun, daß die Eigenvektoren der diskreten Fourier-Transformation sich im wesentlichen aus den entsprechend periodisierten und abgetasteten Hermiteschen Funktionen ergeben müssen. Das soll im folgenden noch explizit nachgewiesen werden.

Wir gehen aus von der Funktion

$$g(t) = \psi_n(\sqrt{2\pi} t) \quad (1.4/23)$$

und setzen sie in die erweiterte Poissonsche Summenformel (1.4/12) ein. Das darin auftretende Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(\sqrt{2\pi} t) e^{-j2\pi \ell t / \tau} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) e^{-jxy} dx =: Y_n(y) \quad (1.4/24)$$

mit

$$y = \sqrt{2\pi} \ell / \tau \quad (1.4/25)$$

führt im wesentlichen wieder auf ψ_n , was sich durch Induktion zeigen läßt. Wir gehen dazu von

$$\begin{aligned} Y_{n+1}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{n+1}(x) e^{-jxy} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)!2^{n+1}\sqrt{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} H_{n+1}(x) e^{-x^2/2-jxy} dx \end{aligned} \quad (1.4/26)$$

aus, wenden (1.4/19) an und integrieren partiell, wobei der ausintegrierte Anteil verschwindet:

$$Y_{n+1}(y) = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2\pi(n+1)!2^{n+1}\sqrt{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2/2-jxy} \left(\frac{d}{dx} \right)^{n+1} e^{-x^2} dx =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi(n+1)!} 2^{n+1} \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-jy) e^{x^2/2-jxy} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)!} 2^{n+1} \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-jy) e^{-x^2/2-jxy} H_n(x) dx = \\
 &= \frac{-jy}{\sqrt{2}(n+1)} Y_n(y) + \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)!} 2^{n+1} \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x H_n(x) e^{-x^2/2-jxy} dx
 \end{aligned}$$

Mit (1.4/20) gelangt man nun leicht zu der Rekursionsformel:

$$Y_{n+1}(y) = -jy \sqrt{\frac{2}{n+1}} Y_n(y) + \sqrt{\frac{n}{n+1}} Y_{n-1}(y) \quad (1.4/27)$$

Für $n = 0$ folgt aus (1.4/24):

$$\begin{aligned}
 Y_0(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2-jxy} dx = \\
 &= \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{4\pi}} = \psi_0(y) \quad (1.4/28)
 \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Rekursionsformel (1.4/27) erhält man dann

$$Y_1(y) = -jy \sqrt{2} \psi_0(y) = -j \psi_1(y) , \quad (1.4/29)$$

$$\begin{aligned}
 Y_2(y) &= -jy Y_1(y) + \sqrt{\frac{1}{2}} Y_0(y) = \\
 &= -y \psi_1(y) + \sqrt{\frac{1}{2}} \psi_0(y) = -\psi_2(y) \quad (1.4/30)
 \end{aligned}$$

und allgemein durch Vergleich der Rekursionsformeln (1.4/27) und (1.4/22):

$$Y_n(y) = (-j)^n \psi_n(y) \quad (1.4/31)$$

Dieses Ergebnis der Integration setzen wir in (1.4/12) ein und erhalten

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_n(\sqrt{2\pi}(\nu\tau/N+k\tau)) = \frac{1}{\tau} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{j\ell\nu 2\pi/N} (-j)^n \psi_n(\sqrt{2\pi}\ell/\tau) . \quad (1.4/32)$$

Wir verfügen nun über τ durch

$$\tau = \sqrt{N} , \quad (1.4/33)$$

was nach (1.4/16) bedeutet, daß die Periodizitätsintervalle τ bzw. N/τ bei der Periodisierung im Zeit- und im Frequenzbereich gleich groß sein sollen. Die auf der rechten Seite von (1.4/32) stehende Reihe konvergiert absolut, da $|\psi_n(x)|$ für $|x| \rightarrow \infty$ wie $\exp(-x^2/2)$ verschwindet. Sie kann daher mit

$$l = \mu + kN, \quad k \text{ ganzzahlig}, \quad \mu = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.4/34)$$

in Teilsummen zerlegt werden. Wir erhalten dann aus (1.4/32) die Beziehung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_n \left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}} (v + kN) \right) = (-j)^n \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mu=0}^{N-1} e^{j\mu v 2\pi/N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_n \left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}} (\mu + kN) \right) \quad (1.4/35)$$

oder

$$\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_n \left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}} (v + kN) \right) \right\} = (-j)^n \text{DFT} \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_n \left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}} (\mu + kN) \right) \right\} \quad (1.4/36)$$

Definieren wir $\tilde{\psi}_n$ als einen N-zeiligen Spaltenvektor mit den Elementen

$$\tilde{\psi}_{nv} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi_n \left(\sqrt{\frac{2\pi}{N}} (v + kN) \right), \quad v = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.4/37)$$

so folgt aus (1.4/35), daß $\tilde{\psi}_n$ ein zum Eigenwert $(-j)^n$ gehöriger Eigenvektor der Matrix $\underline{W}$ der diskreten Fourier-Transformation ist:

$$\underline{W} \tilde{\psi}_n = (-j)^n \tilde{\psi}_n \quad (1.4/38)$$

Die Berechnung der Eigenvektoren nach (1.4/37) ist numerisch unproblematisch, da die Hermiteschen Funktionen jenseits des letzten Wendepunktes, dessen Abszisse sich aus der Differentialgleichung (1.4/18) zu

$$x_w = \sqrt{2n+1} \quad (1.4/39)$$

ergibt, im wesentlichen wie $\exp(-x^2/2)$ verschwinden. Die Anzahl der zu berücksichtigenden Summenglieder ist dann von der Größenordnung $2\sqrt{2n}$.

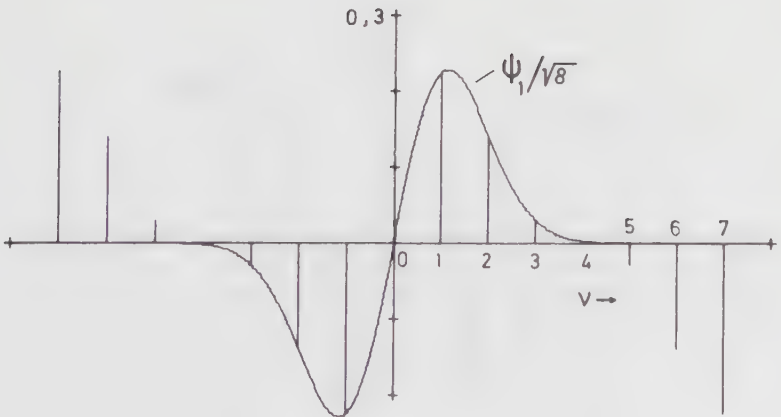
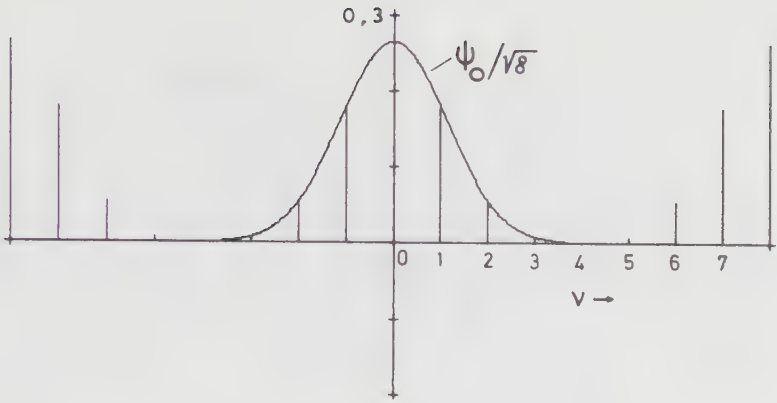


Bild 1/1:

Die Elemente $\tilde{\psi}_{0v}$ und $\tilde{\psi}_{1v}$ der aus $\psi_0(x)$ bzw. $\psi_1(x)$ gebildeten Eigenvektoren von $\underline{W}$.

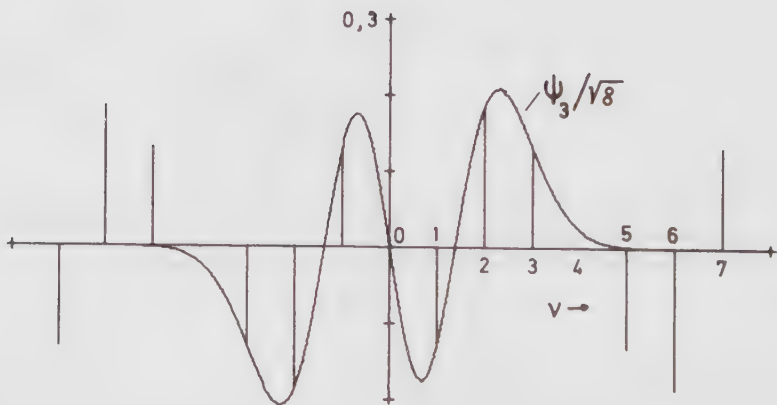
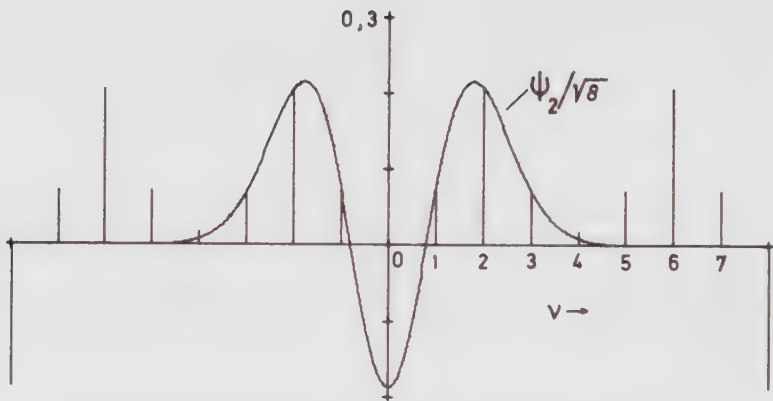


Bild 1/2:

Die Elemente $\tilde{\psi}_{2,\nu}$ und $\tilde{\psi}_{3,\nu}$ der aus $\psi_2(x)$ bzw. $\psi_3(x)$ gebildeten Eigenvektoren von $\underline{H}$.

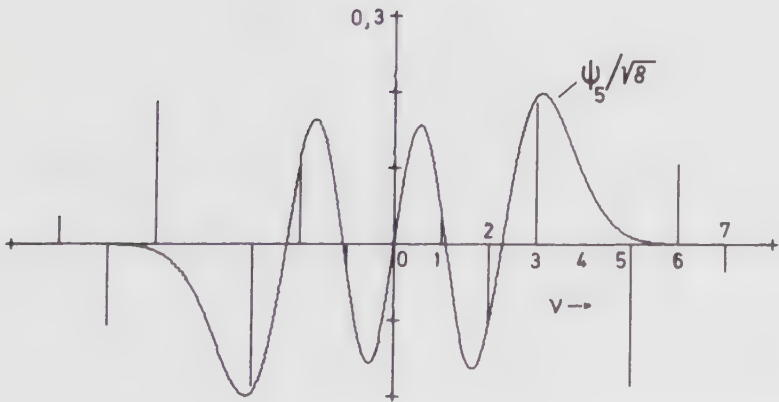
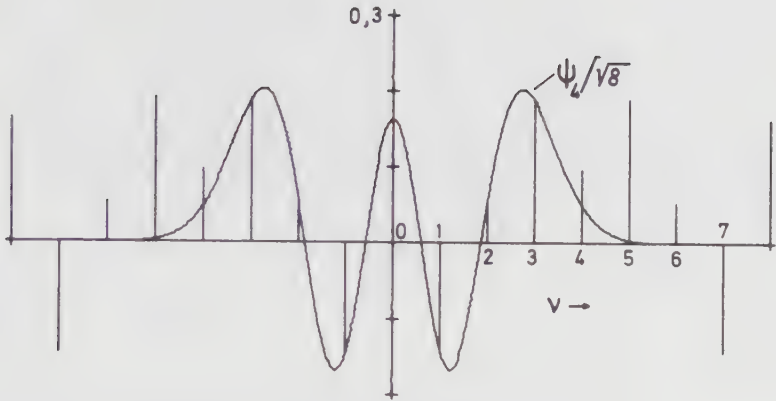


Bild 1/3:

Die Elemente $\tilde{\psi}_{4,v}$ und $\tilde{\psi}_{5,v}$ der aus $\psi_4(x)$ bzw. $\psi_5(x)$ gebildeten Eigenvektoren von $\underline{W}$.

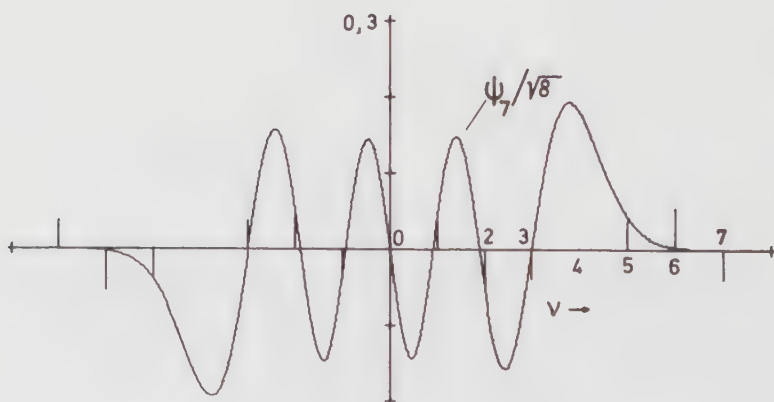
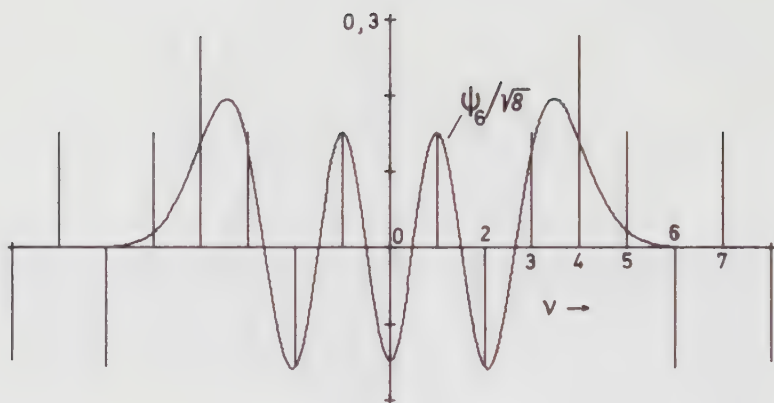


Bild 1/4:

Die Elemente $\tilde{\psi}_{6,v}$ und $\tilde{\psi}_{7,v}$ der aus $\psi_6(x)$ bzw. $\psi_7(x)$ gebildeten Eigenvektoren von $\underline{A}$.

Die Bilder 1/2 bis 1/5 zeigen die Elemente $\tilde{\psi}_{nv}$ der Eigenvektoren für $n = 0, 1, \dots, 7$ und $N = 8$. Dargestellt sind jeweils zwei Perioden dieser Elemente. Summiert wurde dabei entsprechend (1.4/39) nur von $k = -5$ bis $k = 5$. Die Rechnung zeigt, daß in diesem Fall die Beziehung (1.4/38) auf acht Dezimalstellen genau erfüllt ist.

Zum Vergleich sind die jeweiligen Hermiteschen Funktionen $\psi_n(v\sqrt{2\pi/N})$ eingezeichnet. Die durch die Überlagerung verursachten Abweichungen der Elemente $\tilde{\psi}_{nv}$ von den Hermiteschen Funktionen selbst werden in den Zeichnungen für $n \geq 2$ und besonders stark bei $n = 6$ sichtbar.

1.5 Überlagerungssatz und Abtasttheorem

Wie im Abschnitt 1.4 gezeigt wurde, besteht zwischen den Koeffizienten c_n der Fourier-Reihenentwicklung einer stetigen periodischen Funktion $q(t)$ und den Koeffizienten $\tilde{c}_n$ der trigonometrischen Interpolation von N Stützwerten a_v , die durch äquidistante Abtastung einer Periode von $q(t)$ gewonnen werden können, ein Zusammenhang in der Form (1.4/4) des Überlagerungssatzes. Die Koeffizienten $\tilde{c}_n$ der trigonometrischen Interpolation sind danach auch das Ergebnis einer durch Überlagerung vollzogenen Periodisierung der Fourier-Koeffizienten. Dieses Prinzip kennzeichnet nun nicht nur den Zusammenhang zwischen Fourier-Reihenentwicklung und trigonometrischer Interpolation, es gilt in ähnlicher Form auch innerhalb des Bereiches der diskreten Fourier-Transformation. Der dabei zugrundeliegende Überlagerungssatz der diskreten Fourier-Transformation [31] wird im folgenden erläutert.

Wir betrachten eine Folge von N komplexen Zahlen $x_v (v=0, 1, \dots, N-1)$ und setzen voraus, daß N keine Primzahl sein soll. Für N läßt sich dann mindestens eine Darstellung der Form

$$N = p \cdot q \quad \text{mit } p, q > 1, \text{ ganzzahlig} \quad (1.5/1)$$

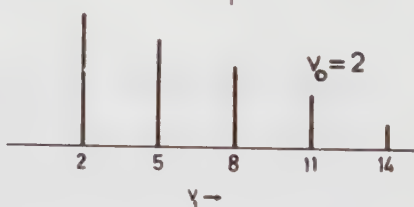
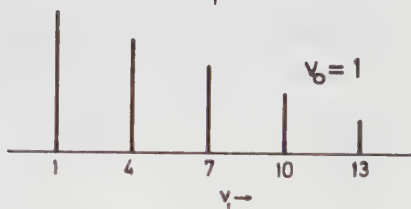
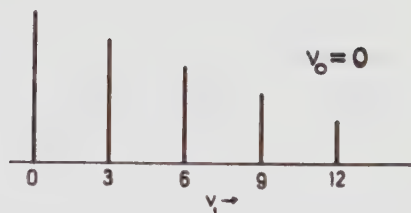
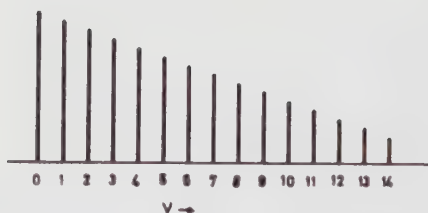


Bild 1/5:

Beispiel zur "Abtastung"
einer Folge.

$N=15$, $q=3$, $p=5$

angeben. Aus den N Werten der Folge $\{x_v\}$ bilden wir nun q Folgen $\{x_{v_1+1}\}$, $\{x_{v_1+2}\}$, $\dots$, $\{x_{v_1+q-1}\}$ zu je p Zahlenwerten entsprechend der Indexaufspaltung:¹

$$v = v_1 q + v_0, \quad v_1 = 0, 1, \dots, p-1$$

$$v_0 = 0, 1, \dots, q-1 \quad (1.5/2)$$

Wir wollen diesen Prozess der Folgenbildung als "Abtastung" im weiteren Sinne auffassen. Die v_0 -te Folge entsteht dann dadurch, daß wir - beginnend bei x_{v_0} - jeden q -ten Wert der ursprünglichen Folge $\{x_v\}$ abtasten, wie es am Beispiel einer reellen Zahlenfolge in Bild 1/5 gezeigt wird.

Wir bilden nun die diskreten Fourier-Transformierten dieser Folgen in der Form

$$y_{\mu_o, v_o}^{(p)} = \frac{1}{p} \sum_{v_1=0}^{p-1} x_{v_1 q + v_o} e^{-j2\pi v_1 \mu_o / p}$$

$$\text{mit } \mu_o = 0, 1, \dots, p-1. \quad (1.5/3)$$

Die Anwendung der diskreten Fourier-Transformation auf die Gesamtfolge ergibt andererseits

$$y_{\mu}^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} x_v e^{-j2\pi v \mu / N}$$

mit $\mu = 0, 1, \dots, N-1,$ (1.5/4)

und die hierzu inverse Beziehung lautet:

$$x_v = \sum_{\mu=0}^{N-1} y_{\mu}^{(N)} e^{j2\pi v \mu / N} \quad (1.5/5)$$

Wir wollen nun eine unmittelbare Beziehung zwischen den Fourier-Transformierten der Teilfolgen einerseits und der Gesamtfolge andererseits herleiten. Die Gleichung (1.5/5) wird dazu umgeformt

$$x_{v_1 q + v_o} - \sum_{m=0}^{N-1} y_m^{(N)} e^{j2\pi (v_1 q + v_o) m / N} = 0 \quad (1.5/6)$$

und folgendermaßen erweitert:

$$\sum_{v_1=0}^{p-1} \left\{ x_{v_1 q + v_o} - \sum_{m=0}^{N-1} y_m^{(N)} e^{j2\pi (v_1 q + v_o) m / N} \right\} e^{-j2\pi v_1 \mu_o / p} = 0 \quad (1.5/7)$$

Hieraus folgt mit (1.5/3) zunächst

$$\begin{aligned} y_{\mu_o, v_o}^{(p)} &= \frac{1}{p} \sum_{v_1=0}^{p-1} \sum_{m=0}^{N-1} y_m^{(N)} e^{j2\pi (v_1 q + v_o) m / N - j2\pi v_1 \mu_o / p} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{m=0}^{N-1} y_m^{(N)} e^{j2\pi v_o m / N} \sum_{v_1=0}^{p-1} e^{j2\pi (m - \mu_o) v_1 / p} \end{aligned} \quad (1.5/8)$$

und bei Beachtung der Summen-Orthogonalität (1.1/7) der harmonischen Funktionen schließlich der Überlagerungssatz der diskreten Fourier-Transformation [31]:

$$y_{\mu_0, \nu_0}^{(p)} = \sum_{k=0}^{q-1} y_{\mu_0+kp}^{(N)} e^{j2\pi\nu_0(\mu_0+kp)/N} \quad (1.5/9)$$

Speziell für $\nu_0 = 0$ gilt die Beziehung

$$y_{\mu_0, 0}^{(p)} = \sum_{k=0}^{q-1} y_{\mu_0+kp}^{(N)}, \quad (1.5/10)$$

d.h. einer Abtastung der ursprünglichen Folge $\{x_v\}$ in der Weise, daß - beginnend bei x_0 - jeder q -te Wert dieser Folge herausgegriffen wird, entspricht eine weitergehende Periodisierung der diskreten Fourier-Transformierten: die ursprüngliche Periodenlänge von N Werten wird entsprechend der Überlagerung (1.5/10) auf $p = N/q$ Werte reduziert.

Gilt nun speziell

$$y_{\mu}^{(N)} = 0 \quad \text{für } p \leq \mu \leq N-1, \quad (1.5/11)$$

so folgt aus (1.5/10)

$$y_{\mu}^{(N)} = y_{\mu_0, 0}^{(p)} \quad \text{für } \mu = \mu_0 = 0, 1, \dots, p-1. \quad (1.5/12)$$

Die Werte der Gesamtfolge $\{x_v\}$ sind dann nach (1.5/5) und (1.5/3) bestimmt durch

$$\begin{aligned} x_v &= \sum_{\mu=0}^{N-1} y_{\mu}^{(N)} e^{j2\pi\nu\mu/N} = \sum_{\mu_0=0}^{p-1} y_{\mu_0, 0}^{(p)} e^{j2\pi\nu\mu_0/N} = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{\mu_0=0}^{p-1} \sum_{v_1=0}^{p-1} x_{v_1 q} e^{-j2\pi v_1 \mu_0/p + j2\pi\nu\mu_0/N} = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{v_1=0}^{p-1} x_{v_1 q} \sum_{\mu_0=0}^{p-1} e^{j2\pi(\nu - v_1 q) \mu_0/N}. \end{aligned} \quad (1.5/13)$$

Die zweite Summe hierin läßt sich mit Hilfe der geometrischen Summenformel berechnen, und es folgt schließlich die Beziehung

$$x_v = \frac{1}{p} \sum_{v_1=0}^{p-1} x_{v_1 q} \frac{e^{j2\pi(\nu/q - v_1)} - 1}{e^{j2\pi(\nu/q - v_1)/p} - 1}, \quad (1.5/14)$$

die als das Abtasttheorem der diskreten Fourier-Transformation bezeichnet wird [1]: Wenn die Werte $y_{\mu}^{(N)}$ der diskreten Fourier-Transformierten einer Folge $\{x_{\nu}\}$ der Länge N von einer gewissen Ordnungszahl $p = N/q$ ab, die ein Teiler von N sein muß, verschwindet, so ist die Folge $\{x_{\nu}\}$ durch die p Abtastwerte $x_{\nu_1 q}$ vollständig bestimmt und nach (1.5/14) zu berechnen.

Zum Schluß dieses Abschnittes soll nun noch die Umkehrung des Überlagerungssatzes (1.5/9) betrachtet werden. Sie ergibt sich zu

$$y_{\mu}^{(N)} = \frac{1}{q} \sum_{\nu_0=0}^{q-1} y_{\mu_0, \nu_0}^{(p)} e^{-j2\pi \nu_0 \mu / N}, \quad (1.5/15)$$

wie man durch Einsetzen von (1.5/3) und bei Beachtung von (1.5/2) leicht anhand von (1.5/4) verifizieren kann. Hiernach läßt sich die diskrete Fourier-Transformation einer Folge von N Werten dadurch bilden, daß man zunächst die diskreten Fourier-Transformierten $y_{\mu_0, \nu_0}^{(p)}$ der entsprechenden Teilfolgen berechnet und dann in einem zweiten Schritt entsprechend (1.5/15) die gesuchten Werte $y_{\mu}^{(N)}$ bestimmt. Ein Prozess dieser oder ähnlicher Form bildet die Basis der sogenannten "schnellen Fourier-Transformation", mit der wir uns im folgenden Kapitel ausführlicher beschäftigen werden.

2. Numerische Ausführung der diskreten Fourier-Transformation.

2.1 Kurzer Überblick

Die klassischen Verfahren zur trigonometrischen Interpolation (z.B. [32]) waren darauf ausgerichtet, dem Anwender eine für relativ kleine Stützwertanzahlen ($N < 100$) geeignete Rechenvorschrift - möglichst übersichtlich (ggf. unter Verwendung von Schablonen) in Einzelschritte aufgelöst - an die Hand zu geben. Ein bevorzugter Algorithmus war beispielsweise die sogenannte RUNGESche Faltung [33], die bei einer durch 4 teilbaren Stützwertanzahl N die Symmetrien in den harmonischen Funktionen ausnutzt und für die Transformation einer Folge von N reellen Zahlen etwa $N^2/4$ reelle Multiplikationen erfordert (z.B. [8]).

Seitdem elektronische Digitalrechner zur Verfügung stehen, ist es möglich und von vielen Anwendungen her auch erforderlich, wesentlich längere Zahlenfolgen der diskreten Fourier-Transformation zu unterwerfen. Die meisten der klassischen Algorithmen, bei denen der Gesamtaufwand gemessen an der Anzahl der erforderlichen elementaren Operationen (Multiplikationen, Additionen), proportional zu N^2 wächst, erweisen sich hier als höchst ineffektiv, wenn man sie mit Algorithmen vergleicht, die in den letzten Jahren unter dem Namen "schnelle Fourier-Transformation" bzw. "FFT (Fast Fourier Transform)" bekannt geworden sind. Hierbei handelt es sich um besonders leistungsfähige Algorithmen, die auf die numerische Ausführung der diskreten Fourier-Transformation dann anwendbar sind, wenn die Stützstellenanzahl N in ganzzahlige Faktoren $p_i > 1$ zerlegbar ist. Wesentlich ist dabei, daß die zu transformierenden Zahlen, wie schon im Abschnitt 1.5 angedeutet wurde, in bestimmte Gruppen unterteilt werden und die DFT gruppenweise vorgenommen wird. Das hier zugrunde liegende Prinzip ist an sich nicht neu, sondern schon früher in allerdings jeweils spezieller Form wiederholt auch von Autoren klassischer Verfahren vorgeschlagen worden [34]. Bei C. RUNGE und H. KÖNIG (1925) findet man beispielsweise die kurze Beschreibung einer Methode, welche die diskrete Fourier-Transformation von N Zahlen (N gerade) in zwei Transformationen von je $N/2$ Zahlen aufzuspalten gestattet [35]. Diese Methode wurde später von G. C. DANIELSON und C. LANCZOS (1942) aufgegriffen und weiterentwickelt [36]. Weniger bekannt ist, daß L. W. POLLAK auch für andere spezielle Faktorisierungen von N das Prinzip der schnellen

Fourier-Transformation, die Stützwerte in "einander durchschlingende Gruppen" einzuteilen und die diskreten Fourier-Transformierten der einzelnen Gruppen zu bilden, schon 1926 in einem Schablonenverfahren verwendet und besonders auf die Eignung dieses Verfahrens für große Stützwertanzahlen hingewiesen hat [37].

Die erste allgemeinere Darstellung der schnellen Fourier-Transformation wurde 1958 von I. J. GOOD angegeben [38]. Hiernach haben J. W. COOLEY und J. W. TUKEY (1965) den bekannten, später nach ihnen benannten Algorithmus entwickelt und mit großem Erfolg zur Berechnung der diskreten Fourier-Transformation angewendet [39]. Das Erscheinen dieser Arbeit von COOLEY und TUKEY löste eine intensive Aktivität in der Anwendung und Weiterentwicklung der schnellen Fourier-Transformation aus. Hierauf im einzelnen einzugehen, ist wegen der großen Zahl der seitdem zu diesem Thema erschienenen Publikationen ([40], [41]) nicht möglich. Unter den angegebenen Algorithmen zur Ausführung der diskreten Fourier-Transformation zeichnet sich nur der von L. I. BLUESTEIN [48] durch ein grundsätzlich neues Prinzip aus. Hier wurde in Analogie zur Technik der Impulskompression, die nach A. PAPOULIS [49] im Prinzip auch zur apparativen Fourier-Transformation kontinuierlicher Funktionen geeignet ist, ein Verfahren zur sogenannten "semi-schnellen" Fourier-Transformation [50] diskreter Wertefolgen entwickelt, das auch zur numerischen Ausführung der z-Transformation verwendet werden kann [51]. Die übrigen Algorithmen zur schnellen Fourier-Transformation ([43] - [47]) basieren auf dem Cooley-Tukey-Algorithmus bzw. auf dem im Prinzip ähnlichen und im Aufwand äquivalenten Algorithmus von W. M. GENTLEMAN und G. SANDE [14]. Die meisten Spezialrechner zur Ausführung der schnellen Fourier-Transformation ([52], [53]) arbeiten im Prinzip nach dem Cooley-Tukey-Algorithmus, wobei i. a. die Länge der zu verarbeitenden Wertefolgen auf Zweierpotenzen beschränkt ist [40].

Im folgenden wird das Prinzip der schnellen Fourier-Transformation am Beispiel des Cooley-Tukey-Algorithmus etwas eingehender erläutert.

2.2 Prinzip der schnellen Fourier-Transformation

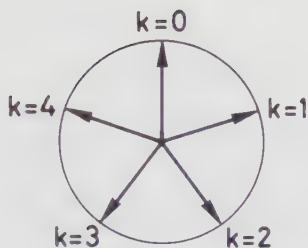
Um die diskrete Fourier-Transformierte einer Folge $\{x_v\}$ von N komplexen Zahlen zu bilden, müssen alle N Elemente der Folge $\{y_0, y_1, \dots, y_{N-1}\}$ etwa nach

$$y_\mu = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} x_v e^{-j\mu v 2\pi/N} \quad (2.2/1)$$

berechnet werden. Es stellt sich damit das numerische Problem, die Ausführung von (2.2/1) für alle Werte von $\mu = 0, 1, \dots, N-1$ mit möglichst geringem Rechenaufwand zu bewerkstelligen. Dabei wird vorausgesetzt, daß alle zur Transformation benötigten Zahlenwerte von $\exp(-j\mu v 2\pi/N)$ zur Verfügung stehen, entweder in Form einer Datenbank oder als spezielle, für diese Anwendung geeignete Subroutine, z.B. nach SINGLETON [43]. Im wesentlichen sind dann nur noch Multiplikationen und Additionen (bzw. Subtraktionen) komplexer Zahlen auszuführen.

Die komplexe Multiplikation entspricht vier reellen Multiplikationen und zwei reellen Additionen; sie ist i.a. eine im Vergleich zur Addition relativ aufwendige Operation. Man kann deshalb davon ausgehen, daß die für die gesamte Transformation benötigte Rechenzeit etwa der Anzahl der insgesamt erforderlichen komplexen Multiplikationen proportional ist [42]. Diese Zahl stellt somit auch ein geeignetes Maß für die Leistungsfähigkeit von Algorithmen zur numerischen Ausführung der diskreten Fourier-Transformation dar. Wird in diesem Zusammenhang im folgenden nur noch von "Multiplikationen" gesprochen, so verstehen wir darunter die Produkte jeweils zweier komplexer Zahlen.

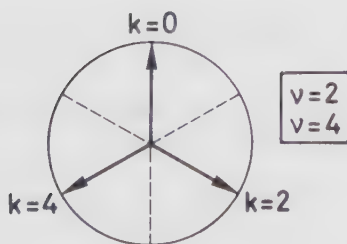
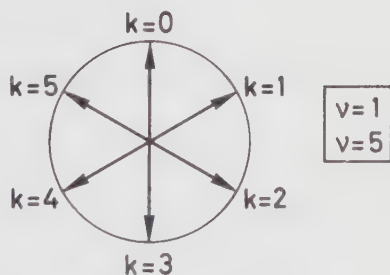
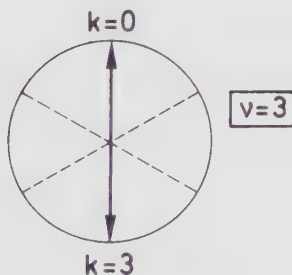
Wenn N eine Primzahl ist, so hat man jeden Wert der Folge $\{x_v\}$ nach (2.2/1) entsprechend den N Werten von μ mit N verschiedenen Faktoren, die durch die N Werte von $\sum_{v=1}^N$ gegeben sind, zu multiplizieren, wie es für das Beispiel $N = 5$ in Bild 2/1 gezeigt wird. Berücksichtigt man, daß die Multiplikation mit 1 bei $\mu = 0$ und $v = 0$ nicht ausgeführt werden muß, so sind noch insgesamt $(N-1)^2$ Produkte jeweils zweier komplexer Zahlen zu berechnen.



$$k = (\mu \cdot v) \bmod 5$$

$\mu \backslash v$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Bild 2/1:

Exponentialfaktoren der DFT für $N=5$.

$$k = (\mu \cdot v) \bmod 6$$

$\mu \backslash v$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Bild 2/2:

Exponentialfaktoren der
DFT für $N=6$.

Wenn N dagegen in der Form

$$N = p \cdot q \text{ mit } p, q > 1, \text{ ganzzahlig,} \quad (2.2/2)$$

darstellbar ist, so wird für die Werte von v und μ , die p bzw. q als Faktor enthalten, die Kreisteilung von N auf q bzw. p Sektoren reduziert (Bild 2/2). Durch Elimination der Periodizitäten im Faktor $\exp(-j\mu v 2\pi/N)$ und durch bestimmte Gruppierungen der Werte x_v kann dann eine gewisse Anzahl von Multiplikationen eingespart werden. Das läßt sich nach COOLEY und TUKEY [39] sehr anschaulich zeigen, indem man die Laufvariablen v und μ folgendermaßen aufspaltet:

$$v = v_1 q + v_0 \text{ mit } \begin{cases} v_1 = 0, 1, \dots, p-1 \\ v_0 = 0, 1, \dots, q-1 \end{cases} \quad (2.2/3)$$

$$\mu = \mu_1 p + \mu_0 \text{ mit } \begin{cases} \mu_1 = 0, 1, \dots, q-1 \\ \mu_0 = 0, 1, \dots, p-1 \end{cases} \quad (2.2/4)$$

Hiernach ist für das Produkt μv folgende Zerlegung möglich:

$$\mu v = (\mu_1 p + \mu_0)(v_1 q + v_0) = \mu_1 v_1 N + \mu_1 v_0 p + \mu_0 v_1 q + \mu_0 v_0 \quad (2.2/5)$$

Dem entspricht eine Zerlegung von $\exp(-j\mu v 2\pi/N)$ in vier Faktoren, wobei jedoch der sich aus dem ersten Summanden auf der rechten Seite von (2.2/5) ergebende Faktor gleich 1 ist und weggelassen werden kann (Elimination der Periodizität):

$$e^{-j\mu v 2\pi/N} = e^{-j\mu_1 v_0 2\pi/q} e^{-j\mu_0 v_0 2\pi/N} e^{-j\mu_0 v_1 2\pi/p} \quad (2.2/6)$$

Beim Cooley-Tukey-Algorithmus wird nun die Summation in (2.2/1) entsprechend der nach (2.2/6) möglichen Aufspaltung

$$y_\mu = y_{\mu_1 p + \mu_0} = \frac{1}{N} \sum_{v_0=0}^{q-1} e^{-j\mu v_0 2\pi/N} \sum_{v_1=0}^{p-1} x_{v_1 q + v_0} e^{-j\mu_0 v_1 2\pi/p} \quad (2.2/7)$$

folgendermaßen ausgeführt: Zuerst werden die den verschiedenen möglichen Kombinationen von μ_0 und v_0 entsprechenden N Werte

der inneren Summe in (2.2/7)

$$X(\mu_0, \nu_0) = \sum_{v_1=0}^{p-1} x_{v_1 q + \nu_0} e^{-j\mu_0 \nu_1 2\pi/p} \quad (2.2/8)$$

berechnet. Dazu sind Np Multiplikationen notwendig, wenn wir zunächst davon absehen, daß die Multiplikation mit dem Faktor 1 jeweils bei den Gliedern mit $\mu_0 = 0$ und $\nu_1 = 0$ nicht ausgeführt werden muß. In einem zweiten Schritt sind dann die Werte der Folge $\{y_\mu\}$ nach

$$y_\mu = y_{\mu_1 p + \mu_0} = \frac{1}{N} \sum_{\nu_0=0}^{q-1} X(\mu_0, \nu_0) e^{-j\mu \nu_0 2\pi/N} \quad (2.2/9)$$

zu bestimmen, wobei weitere Nq Multiplikationen ausgeführt werden müssen. Insgesamt ist somit zur Bestimmung von $\{y_\mu\}$ ein Aufwand von $N(p+q)$ Multiplikationen erforderlich.

Das geschilderte Prinzip läßt sich, wie in Abschnitt 1.5 schon angedeutet wurde, auch so interpretieren, daß zunächst die diskrete Fourier-Transformation für die q Teilfolgen $\{x_{v_1 q}\}$, $\{x_{v_1 q+1}\}$, ..., $\{x_{v_1 q+q-1}\}$ von je p Zahlen ausgeführt wird. Das entspricht der Bestimmung der in (1.5/3) definierten Größen

$$y_{\mu_0, \nu_0}^{(p)} = \frac{1}{p} X(\mu_0, \nu_0) \quad (2.2/10)$$

Der zweite Schritt besteht dann nach (2.2/9) darin, die diskreten Fourier-Transformierten der p Folgen

$$\left\{ y_{\mu_0, 0}^{(p)}, y_{\mu_0, 1}^{(p)} e^{-j\mu_0 2\pi/N}, \dots, y_{\mu_0, q-1}^{(p)} e^{-j\mu_0 (q-1) 2\pi/N} \right\} \\ \mu_0 = 0, 1, \dots, p-1 \quad (2.2/11)$$

zu berechnen:

$$y_{\mu_1 p + \mu_0} = \frac{1}{q} \sum_{\nu_0=0}^{q-1} \left[y_{\mu_0, \nu_0}^{(p)} e^{-j\mu_0 \nu_0 2\pi/N} \right] e^{-j\mu_1 \nu_0 2\pi/q} \quad (2.2/12)$$

Die hierzu erforderliche Multiplikation der Größe $y_{\mu_0, \nu_0}^{(p)}$ mit dem sogenannten "twiddle factor" [14] oder "Drehfaktor" [42]

$\exp(-j\mu_0 v_0 2\pi/N)$ ist nur in dem Sonderfall teilerfremder Zahlen p und q vermeidbar, indem man nach GOOD [38] gegenüber (2.2/3) bzw. (2.2/4) eine andere spezielle Aufspaltung der Laufvariablen v und μ wählt. Dieser Sonderfall soll jedoch hier nicht erörtert werden.

Wenn N in mehr als zwei ganzzahlige Faktoren, die größer als 1 sind, zerlegt werden kann, so läßt sich das geschilderte Prinzip wiederholt anwenden. Beispielsweise sei p in der Form

$$p = r s \quad \text{mit } r, s > 1, \text{ ganzzahlig} \quad (2.2/13)$$

darstellbar. Die q diskreten Fourier-Transformationen nach (2.2/8) lassen sich dann ihrerseits in je r (bzw. s) diskrete Fourier-Transformationen jeweils s (bzw. r) komplexer Zahlen unterteilen, wobei jede dieser Transformationen $p(r+s)$ Multiplikationen erfordert. Der Gesamtaufwand bei der schnellen Fourier-Transformation einer Folge von $N = q r s$ Zahlen entspricht dann der Ausführung von

$$Nq + qp(r+s) = N(q+r+s) \quad (2.2/14)$$

Multiplikationen.

Dieses Prinzip läßt sich beliebig fortsetzen. Es ist leicht einzusehen, daß die diskrete Fourier-Transformation einer nach

$$N = \prod_{i=1}^n P_i, \quad P_i > 1, \text{ ganzzahlig} \quad (2.2/15)$$

faktorisierbaren Anzahl von komplexen Zahlen dann die Ausführung von

$$M = N \sum_{i=1}^n P_i \quad (2.2/16)$$

Multiplikationen erfordert. Dieser Aufwand läßt sich noch dadurch reduzieren, daß man die Ausführung von Multiplikationen mit dem Faktor 1 vermeidet. Darüber hinaus sind durch Anwendung des Überlagerungssatzes der diskreten Fourier-Transformation weitere Einsparungen an Multiplikationen möglich, wie im folgenden gezeigt wird.

2.3 Anwendung des Überlagerungssatzes

Der im Abschnitt 1.5 erläuterte Zusammenhang zwischen dem Überlagerungssatz der diskreten Fourier-Transformation einerseits und dem Prinzip der schnellen Fourier-Transformation andererseits ermöglicht eine vorteilhafte Modifikation des beschriebenen Algorithmus [31]. Zur Erläuterung der dabei zugrunde liegenden Methode gehen wir zunächst wieder von der Faktorisierung $N = pq$ aus. Der Überlagerungssatz gilt dann in der Form (1.5/9), die speziell für $v_0 = 0$ in die Beziehung (1.5/10) übergeht. Beachten wir die Identität von y_μ und $y_\mu^{(N)}$, sowie den Zusammenhang (2.2/10), so lautet (1.5/10) auch

$$X(\mu_0, 0) = p \sum_{k=0}^{q-1} y_{\mu_0 + kp} \quad (2.3/1)$$

Da μ_0 hierin die Werte $0, 1, \dots, p-1$ annehmen kann, ist (2.3/1) gleichbedeutend mit den folgenden p Gleichungen:

$$\begin{aligned} q \ X(0, 0) &= N [y_0 + y_p + y_{2p} + \dots + y_{(q-1)p}] \\ q \ X(1, 0) &= N [y_1 + y_{p+1} + y_{2p+1} + \dots + y_{(q-1)p+1}] \\ &\vdots \\ q \ X(p-1, 0) &= N [y_{p-1} + y_{2p-1} + y_{3p-1} + \dots + y_{qp-1}] \end{aligned} \quad (2.3/2)$$

In diesem Gleichungssystem tritt jeder Wert der Folge $\{y_\mu\}$ genau einmal auf. Aus den Gleichungen (2.3/2) können somit p der Werte y_μ ohne Multiplikationen bestimmt werden, wenn die übrigen Werte der Folge $\{y_\mu\}$ bekannt sind. Nach diesem Prinzip läßt sich nun u.a. der oben beschriebene Cooley-Tukey-Algorithmus, der bei $N = pq$ im wesentlichen aus den Operationen (2.2/8) und (2.2/9) besteht, folgendermaßen abwandeln [31]:

Zuerst werden wie beim ursprünglichen Algorithmus alle N Werte von $X(\mu_0, v_0)$ nach (2.2/8) berechnet. Das erfordert, wenn wir nun auch beachten, daß die Ausführung der Multiplikationen mit dem Faktor 1 jeweils bei den Gliedern mit $v_1 = 0$ bzw. $\mu_0 = 0$ vermieden werden kann, insgesamt $q(p-1)^2$ Multiplikationen.

Im zweiten Schritt werden nun nicht mehr alle Werte der Folge $\{y_{\mu}\}$ nach (2.2/9) sondern nur noch $N-p$ dieser Werte, beispielsweise die für $\mu = 0, 1, 2, \dots, N-p-1$ berechnet, wobei die Multiplikation mit dem Faktor $1/N$ noch zurückgestellt wird. Die Durchführung dieser Operation

$$Ny_{\mu} = \sum_{\nu_0=0}^{q-1} X(\mu_0, \nu_0) e^{-j\mu\nu_0 2\pi/N} \quad (2.3/3)$$

für $\mu = 0, 1, \dots, N-p-1$ erfordert

$$(N-p-1)(q-1) = N(q-2) + p-q + 1 \quad (2.3/4)$$

Multiplikationen, wenn man berücksichtigt, daß für $\mu = 0$ bzw. $\nu_0 = 0$ die Multiplikationen nicht ausgeführt werden. Die letzten p Werte von y_{μ} lassen sich nun aus (2.3/2) durch reine Additionen gewinnen:

$$Ny_{(q-1)p+\mu_0} = q X(\mu_0, 0) - N \sum_{k=0}^{q-2} y_{\mu_0+kp}$$

$$\mu_0 = 0, 1, \dots, p-1 \quad (2.3/5)$$

Insgesamt müssen also nur noch

$$q(p-1)^2 + N(q-2) + p-q+1 = N(p+q-4) + p+1 = N(p+q-4 + \frac{1}{q}) + 1 \quad (2.3/6)$$

Multiplikationen ausgeführt werden. Der Aufwand hängt nunmehr gegenüber dem Cooley-Tukey-Algorithmus i.a. von der Art der Aufspaltung ab. Wenn p und q nicht gleich groß sind, ist bei der hier vorgenommenen Aufspaltung der Fall $q > p$ nach (2.3/6) bezüglich des Aufwandes günstiger als der umgekehrte Fall.

Läßt sich p weiter in die Faktoren rs zerlegen, so kann man das beschriebene Prinzip auch auf die Berechnung der $X(\mu_0, \nu_0)$ nach (2.2/8) anwenden. Man hat dann nur noch insgesamt

$$N(q-2) + p - q + 1 + q [p(r + s - 4) + r + 1] =$$

$$= N(q + r + s - 6) + q r + p + 1 =$$

$$= N(q + r + s - 6 + \frac{1}{q} + \frac{1}{s}) + 1 \quad (2.3/7)$$

Multiplikationen vorzunehmen. Dabei ist es bei verschiedenen großen Faktoren q rs wiederum am günstigsten, die Aufspaltung so zu wählen, daß r der kleinste der drei Faktoren ist.

Die fortgesetzte Anwendung dieses Prinzips führt bei einer nach (2.2/15) in n Faktoren zerlegbaren Zahl N auf einen Aufwand, der der Ausführung von

$$M_n(N) = N \sum_{i=1}^n (p_i - 2) + N \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{p_i} + 1 \quad (2.3/8)$$

Multiplikationen entspricht. Bei verschiedenen großen Faktoren p_i ist es dann zweckmäßig, die Gruppierungen so vorzunehmen, daß p_n der kleinste Faktor ist. Im Falle gleicher Faktoren $p_i = a$ ist N durch

$$N = a^n \quad (2.3/9)$$

gegeben, und aus (2.3/8) folgt

$$M_n(N=a^n) = N n(a-2) + \frac{N}{a} (n-1) + 1. \quad (2.3/10)$$

Für verschiedene Werte der Basis a ist die Anzahl M_n der erforderlichen Multiplikationen in Abhängigkeit von n in Bild 2/3 dargestellt. Der Optimalfall liegt hiernach bei der Basis $a = 2$, wo

$$M_n(N=2^n) = \frac{N}{2} (n-1) + 1 \approx \frac{N}{2} (n-1) = \frac{N}{2} \lg(N/2) \quad (2.3/11)$$

Multiplikationen erforderlich sind.

Der Bereich zwischen den Fällen $N = 2^n$ und $N = 3^n$ wird zu einem großen Teil durch Faktorisierungen der Form $N = 3^m 2^{n-m}$ bzw. $N = 5^m 2^{n-m}$ ausgefüllt. Einige Beispiele dieser Art sind in Bild 2/4 dargestellt.

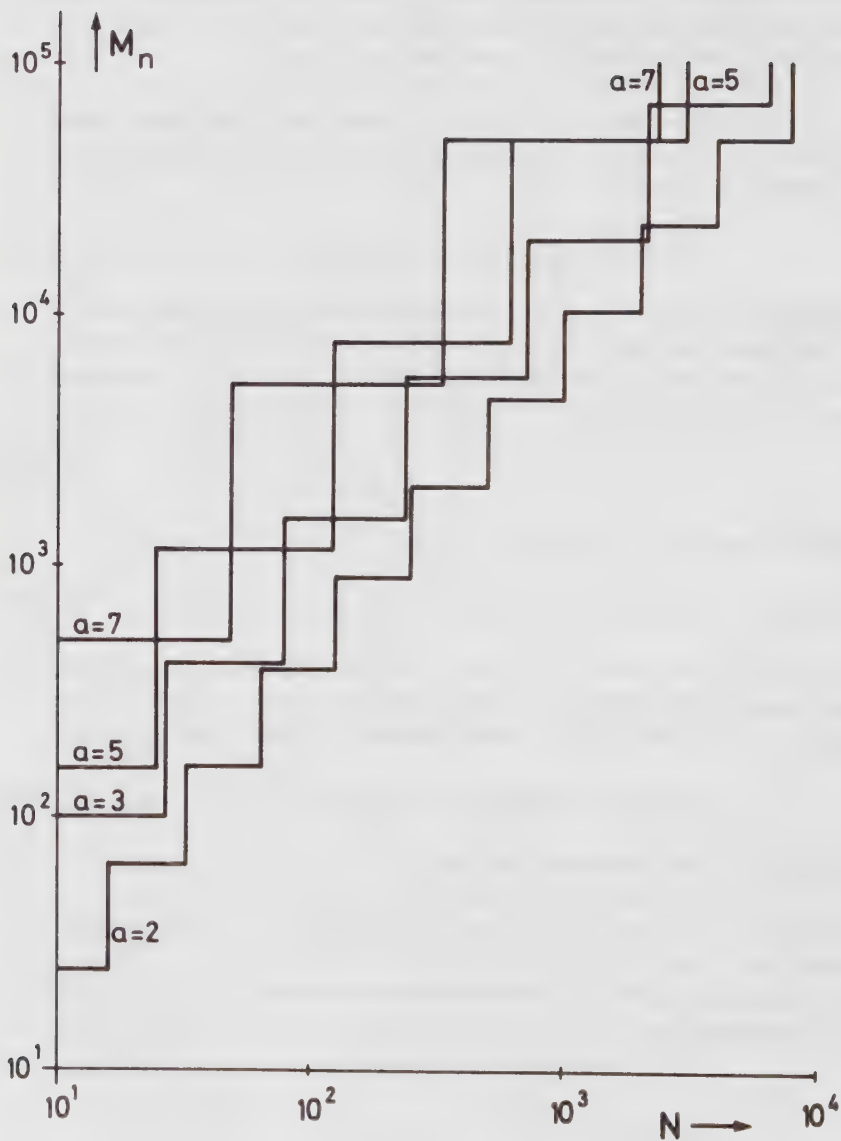


Bild 2/3: Anzahl M_n der erforderlichen Multiplikationen bei dem beschriebenen FFT-Algorithmus für $N=a^n$.

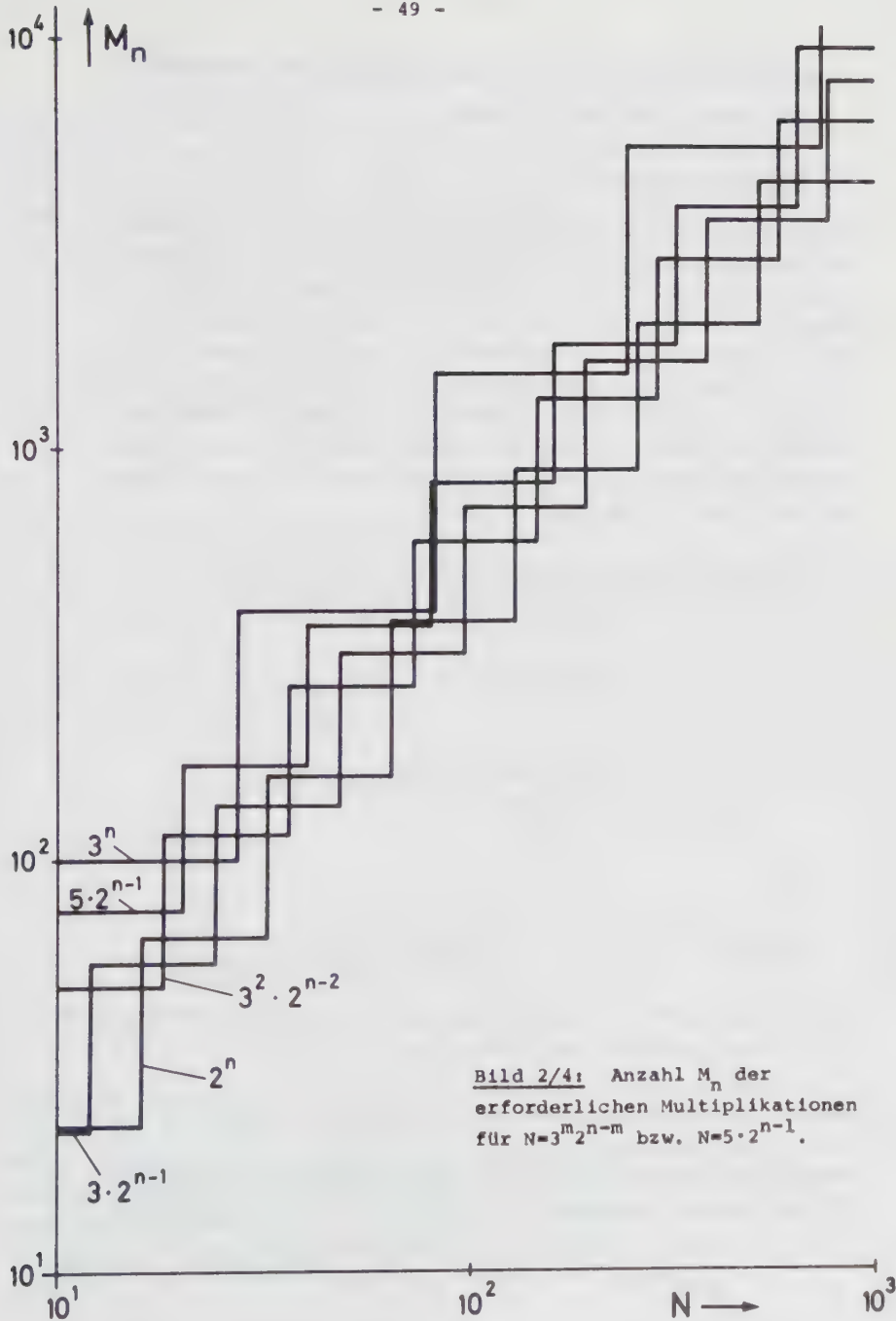


Bild 2/4: Anzahl M_n der erforderlichen Multiplikationen für $N=3^{m_2}2^{n-m_2}$ bzw. $N=5 \cdot 2^{n-1}$.

3. Realisierung linearer zeitinvarianter diskontinuierlicher

Systeme durch schnelle Faltung

3.1 Systemeigenschaften

Wir betrachten im folgenden Systeme, die sich durch lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben lassen und somit allgemein Folgen von Zahlenwerten durch entsprechende algebraische Operationen miteinander verknüpfen. Von der Anwendung her bezeichnet man derartige Systeme als "Digitale Filter" [19], wobei die zu verarbeitenden Zahlenfolgen diskrete, äquidistante Amplitudenwerte kontinuierlicher Zeitfunktionen darstellen bzw. als solche aufgefaßt werden können. Für den Sprachgebrauch wollen wir auch hier die Zahlenfolgen als zeitliche Folgen interpretieren.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung von Systemen, die jeweils nur einen Eingang und einen Ausgang besitzen (Bild 3/1).



Bild 3/1: Beispiel eines diskontinuierlichen Systems.

Die Eingangsgröße g_1 und die Ausgangsgröße g_2 interessieren lediglich in den äquidistanten Zeitpunkten

$$t_k = kT, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.1/1)$$

wobei T das Abtastintervall ist. Die Verknüpfung von Eingangs- und Ausgangsgröße sei durch die lineare Differenzengleichung

$$\sum_{v=0}^n c_{n-v} g_2((k-v)T) = \sum_{\mu=0}^m b_{m-\mu} g_1((k-\mu)T) \quad (3.1/2)$$

mit den konstanten Koeffizienten $c_0, c_1, \dots, c_n$ und $b_0, b_1, \dots, b_m$ beschreibbar. Linearität und Zeitinvarianz des Systems sind damit gegeben. Wir fordern zusätzlich, daß das System kausal sei. Jeder Wert $g_2(kT)$ der Ausgangsfolge ist dann unabhängig von Werten $g_1(lT)$ der Eingangsfolge, die zu späteren Zeitpunkten ($l > k$) am Eingang liegen. Eine notwendige Bedingung hierfür ist

$$m \leq n, \quad (3.1/3)$$

wie man unmittelbar aus (3.1/2) für $k = n$ schließen kann:

$$\begin{aligned} c_n g_2(nT) + c_{n-1} g_2((n-1)T) + \dots + c_0 g_2(0) = \\ = b_m g_1(nT) + b_{m-1} g_1((n-1)T) + \dots + b_0 g_1((n-m)T) \end{aligned}$$

Nur für $m \leq n$ hängen die Ausgangswerte ausschließlich von früher bzw. gleichzeitig anliegenden Werten der Eingangsfolge ab.

Ist die Eingangsfolge erst von einem bestimmten endlichen Zeitpunkt ab von Null verschieden, etwa

$$g_1(kT) = 0 \quad \text{für } k < 0, \quad (3.1/4)$$

und gilt weiterhin

$$g_2(kT) = 0 \quad \text{für } -n \leq k \leq -1, \quad (3.1/5)$$

so folgt aus der Kausalität des Systems

$$g_2(kT) = 0 \quad \text{für } k < 0. \quad (3.1/6)$$

Die Werte der Ausgangsfolge ergeben sich dann nach (3.1/2) rekursiv aus den Werten der Eingangsfolge. Zur Vereinfachung der Schreibweise fassen wir die Zeitkonstante T als Zeiteinheit auf. Sie erscheint somit nicht mehr im Argument der Funktionen. Das Gleichungssystem zur Bestimmung von $L > n$ Werten der Ausgangsfunktion lautet nun bei Voraussetzung von (3.1/4) und (3.1/5):

$$k = 0: \quad c_n g_2(0) = b_m g_1(0)$$

$$k = 1: \quad c_n g_2(1) + c_{n-1} g_2(0) = b_m g_1(1) + b_{m-1} g_1(0)$$

$$\vdots$$

$$k = m: \quad c_n g_2(m) + c_{n-1} g_2(m-1) + \dots + c_{n-m} g_2(0) = \\ = b_m g_1(m) + b_{m-1} g_1(m-1) + \dots + b_0 g_1(0)$$

$$\vdots$$

$$k = L - 1: \quad c_n g_2(L-1) + c_{n-1} g_2(L-2) + \dots + c_0 g_2(L-n-1) = \quad (3.1/7) \\ = b_m g_1(L-1) + b_{m-1} g_1(L-2) + \dots + b_0 g_1(L-m-1)$$

Durch rekursive Auflösung dieses Gleichungssystems kann man das betrachtete System mit Hilfe eines Digitalrechners realisieren. Im wesentlichen ist dazu die Ausführung von $(n+m)L$ Multiplikationen erforderlich, wenn L Werte der Ausgangsfunktion zu berechnen sind. Unter gewissen Voraussetzungen kann diese System-Realisierung durch Anwendung der schnellen Fourier-Transformation ökonomischer gestaltet werden. Die Verfahren hierzu werden in den beiden folgenden Abschnitten erörtert. Zuerst behandeln wir den Sonderfall der nichtrekursiven Systeme.

3.2 Nichtrekursive Systeme

Die besonderen Eigenschaften dieser Systeme werden z.B. in [20] ausführlich behandelt. Wir beschränken uns hier auf die Feststellung, daß sie die im Abschnitt 3.1 genannten Systemeigenschaften besitzen müssen und darüberhinaus durch die folgenden besonderen Vorschriften für die Koeffizienten der Differenzengleichung (3.1/2) hinreichend gekennzeichnet sind:

$$c_n = 1, \quad c_v = 0 \quad \text{für } v = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.2/1)$$

$$m = n \quad (3.2/2)$$

Hieraus ergibt sich eine spezifische Eigenschaft der nichtrekursiven Systeme: Wenn die Eingangsfunktion $g_1(k)$ mit

$$g_1(k) = 0 \quad \text{für } k < 0 \quad \text{und } k \geq L \quad (3.2/3)$$

in ihrer Länge auf L Werte beschränkt ist, so besteht auch die Ausgangsfunktion $g_2(k)$ nur aus endlich vielen, und zwar genau

$$N = L + n \quad (3.2/4)$$

äquidistanten Zahlenwerten, die i.a. nicht verschwinden. Das ergibt sich unmittelbar aus dem Gleichungssystem (3.1/7), wenn man die Bedingungen (3.2/1) und (3.2/2) einsetzt:

$$g_2(k) = \sum_{\mu=0}^n b_{n-\mu} g_1(k-\mu) \quad (3.2/5)$$

Bei Berücksichtigung von (3.2/3) lauten die erste und die letzte nicht-verschwindende Gleichung dieses Systems

$$g_2(0) = b_n g_1(0) \quad (3.2/6)$$

$$g_2(N-1) = b_0 g_1(L-1) . \quad (3.2/7)$$

Insgesamt ergibt sich die Verknüpfung von Eingangs- und Ausgangsfunktion aus dem folgenden Matrix-Schema:

$$\begin{bmatrix} g_2(0) \\ g_2(1) \\ g_2(2) \\ \vdots \\ g_2(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n & \overbrace{0 & 0 & \dots & 0}^{L-1 \text{ Nullelemente}} \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_2 & b_3 & b_4 & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 & b_0 & b_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 & b_0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_1(0) \\ \vdots \\ g_1(L-1) \end{bmatrix} \quad \left. \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} n \text{ Null-} \\ \text{elemente} \end{matrix}$$

(3.2/8)

Wenn wir als Eingangsfolge speziell die Werte

$$g_1(\mu) = \delta_{0\mu} \quad (\text{Kroneckersymbol}) \quad (3.2/9)$$

verwenden, so nennen wir die Ausgangsfolge die Impulsantwort $h_0(k)$ des Systems. Für das betrachtete nichtrekursive System ist die Impulsantwort nach (3.2/8) durch

$$h_0(\mu) = b_{n-\mu}, \quad \mu = 0, 1, \dots, n \quad (3.2/10)$$

gegeben. Wir können die Beziehung (3.2/5), die Eingangs- und Ausgangsfolge miteinander verknüpft, dann auch in der Form

$$g_2(k) = \sum_{\mu=0}^n h_0(\mu) g_1(k-\mu) \quad (3.2/11)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

schreiben. Diese Operation ist bekanntlich die diskrete Faltung (z.B. [2]) der beiden Wertefolgen $\{h_0(\mu)\}$ und $\{g_1(\mu)\}$ und wird symbolisch durch

$$g_2 = h_0 * g_1 \quad (3.2/12)$$

gekennzeichnet. Die diskrete Faltung ist kommutativ

$$g_2 = h_0 * g_1 = g_1 * h_0, \quad (3.2/13)$$

was man beispielsweise nach sinngemäßer Vertauschung der Folgen

h_0 und g_1 in der unten angegebenen Matrizendarstellung unmittelbar einsieht. Diese Darstellung der diskreten Faltung ergibt sich aus (3.2/8) bei Berücksichtigung von (3.2/10):

$$\begin{bmatrix} g_2(0) \\ g_2(1) \\ g_2(2) \\ \vdots \\ g_2(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0(n) & h_0(n-1) & \dots & h_0(0) & \overbrace{0 \dots 0}^{L-1 \text{ Nullelemente}} \\ 0 & h_0(n) & \dots & h_0(1) & h_0(0) & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_0(n-1) & h_0(n-2) & \dots & h_0(0) & 0 \dots 0 & h_0(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_1(0) \\ \vdots \\ g_1(L-1) \end{bmatrix} *$$

* n Nullelemente

(3.2/14)

Bezeichnen wir die quadratische, N-reihige Matrix hierin mit $\underline{H}_0$ und die Spaltenvektoren mit $\underline{g}_2$ bzw. $\underline{g}_1$, so lautet (3.2/14) in vektorieller Darstellung

$$\underline{g}_2 = \underline{H}_0 \underline{g}_1 \quad (3.2/15)$$

Während die zyklische diskrete Faltung (1.2/46) stets aus zwei Folgen gleicher Länge N eine dritte Folge erzeugt, die ebenfalls die Länge N besitzt, ist die diskrete Faltung allgemein auch für Folgen verschiedener Länge definiert: Sie bildet aus zwei Folgen mit den Längen L_1 und L_2 eine dritte Folge der Länge $L_1 + L_2 - 1$. Der Erzeugungsprozess besteht darin, daß sich die miteinander gefalteten Folgen schrittweise vom Rand her durchdringen, wobei zur Deckung kommende Elemente miteinander multipliziert werden. Dieser Prozess läßt sich in Matrizenform nur durch entsprechendes, in (3.2/14) ersichtliches Einfügen von Nullelementen beschreiben. Nichtsdestoweniger führt auch die diskrete Faltung auf eine Matrix zyklischer Bauart, d.h. sie kann ebenso wie die zyklische diskrete Faltung durch den im Abschnitt 1.2 beschriebenen Prozess über die diskrete Fourier-Transformation berechnet werden. Nach (1.2/57) wird die Matrix $\underline{H}_0$ durch die Ähnlichkeitstransformation mit $\underline{W}^{-1}$

$$\underline{W} \underline{H}_0 \underline{W}^{-1} = \underline{\Lambda}_0 \quad (3.2/16)$$

diagonalisiert. Die Elemente der Eigenwertmatrix $\underline{\Lambda}_0$ sind nach (1.2/57) und 1.2/58) gegeben durch die diskrete Fourier-Transformierte der in der Reihenfolge invertierten letzten Zeile der Matrix $\underline{H}_0$. Faßt man diese Elemente in dem N-zeiligen Spaltenvektor

$$\underline{h}_0 := \begin{bmatrix} h_0(n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_0(0) \\ h_0(1) \\ \vdots \\ h_0(n-1) \end{bmatrix} \quad (3.2/17)$$

zusammen, so sind die Eigenwerte von $\underline{H}_0$ entsprechend (1.2/61) durch die Elemente des Spaltenvektors

$$\underline{\lambda}_0 := \sqrt{N} \underline{W} \underline{h}_0 = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1})' \quad (3.2/18)$$

gegeben. Mit der Relation

$$\underline{q}_2 = \underline{W}^{-1} \underline{\Lambda}_0 \underline{W} \underline{q}_1 \quad (3.2/19)$$

ergibt sich dann wieder der Prozess (1.2/49) bis (1.2/51) als Alternative zur direkten Ausführung der diskreten Faltung. Es lohnt sich aber nur dann, diese Alternative überhaupt in Erwägung zu ziehen, wenn bei der numerischen Ausführung von (3.2/19) Algorithmen der schnellen Fourier-Transformation in irgendeiner Form zur Anwendung gelangen. Das läßt sich durch die Gegenüberstellung zweier Schaltungsanordnungen veranschaulichen, die beide das betrachtete System realisieren. Eine der Anordnungen entspricht dabei der Realisierung des Systems nach (3.2/19) und die andere einer direkten Realisierung.

Ein Zugang zu der ersteren ergibt sich, wenn man von der Normalform der Matrix $\underline{H}_0$ zu der ihr äquivalenten Spektraldarstellung übergeht. Beachtet man, daß die durch (1.2/53) definierten Spaltenvektoren $\underline{a}_k$ der Matrix $\underline{W}^{-1}$ orthogonal sind

$$\underline{a}_k^\dagger \underline{a}_l = \delta_{kl} , \quad (3.2/20)$$

was unmittelbar aus der Summen-Orthogonalität (1.1/7) folgt, so gilt die Spektraldarstellung (z.B. [6]):

$$\underline{H}_0 = \underline{W}^{-1} \underline{A}_0 \underline{W} = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \underline{a}_k \underline{a}_k^\dagger . \quad (3.2/21)$$

Die in dieser Darstellung auftretenden N Dyaden sind Matrizen zyklischer Bauart:

$$\begin{aligned} N \underline{a}_k \underline{a}_k^\dagger &= \begin{bmatrix} w^0 \\ w^{-k} \\ \vdots \\ w^{-(N-1)k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^0 & w^k & \dots & w^{(N-1)k} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} w^0 & w^k & w^{2k} & \dots & w^{(N-1)k} \\ w^{-k} & w^0 & w^k & \dots & w^{(N-2)k} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ w^{-(N-1)k} & w^{-(N-2)k} & \dots & w^0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2/22)$$

Man kann daher die Matrix $\underline{H}_0$ mit

$$\underline{H}_0 = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{H}_{0k} + \sum_{k=0}^{N-1} \underline{R}_k \quad (3.2/23)$$

in eine Summe von N Faltungsmatrizen der Form

$$\underline{H}_{0k} = \frac{1}{N} \lambda_k \begin{bmatrix} w^0 & w^k & w^{2k} & \dots & w^{nk} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w^0 & w^k & \dots & w^{(n-1)k} & w^{nk} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & & & \\ w^k & w^{2k} & \dots & w^{(n-1)k} & w^{nk} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2/24)$$

und entsprechenden Restmatrizen

$$\underline{R}_k = \lambda_k \underline{a}_k \underline{a}_k^{\dagger} - \underline{H}_{ok} \quad (3.2/25)$$

zerlegen. Die Summe aller Restmatrizen verschwindet, weil sich letztlich aus (3.2/23) die Matrix $\underline{H}_0$ ergeben muß, die genau an den Stellen, wo bei den Restmatrizen nicht-verschwindende Elemente auftreten, Nullelemente besitzt. Die hieraus resultierende Zerlegung von $\underline{H}_0$

$$\underline{H}_0 = \sum_{k=0}^{N-1} \underline{H}_{ok} \quad (3.2/26)$$

in eine Summe von N Faltungsmatrizen entspricht einer Aufspaltung des ursprünglichen Systems in eine Parallelanordnung entsprechender Teilsysteme. Die Impulsantwort h_{ok} des durch $\underline{H}_{ok}$ beschriebenen Teilsystems ist durch

$$h_{ok}(\mu) = \frac{1}{N} \lambda_k w^{(n-\mu)k}, \quad \mu = 0, 1, \dots, n \quad (3.2/27)$$

gegeben. Sie läßt sich beispielsweise einem System mit der in Bild 3/2a gezeigten Struktur zuordnen und wird im wesentlichen durch das aus einem Verzögerungsglied, zwei Konstanten-Multiplizierern und einem Summierer bestehende "Elementarfilter" erzeugt. Das vorgeschaltete nichtrekursive Kammfilter ([2], [20]) hat praktisch nur die Aufgabe, die Impulsantwort auf $n + 1$ Werte zu begrenzen. Bild 3/2b zeigt die Gesamtstruktur, die Eingangs- und Ausgangsfunktion entsprechend (3.2/19) miteinander verknüpft.

Für die direkte Realisierung des Systems wählen wir eine ähnliche Struktur, die sich aus dem Frequenzabtastrverfahren (frequency sampling technique) ergibt ([2], [20]). Hierzu bilden wir die diskrete Fourier-Transformierte der Impulsantwort h_o , beispielsweise in der Form

$$\hat{h}_o(\mu) = \sum_{v=0}^n h_o(v) e^{-j\mu v 2\pi/(n+1)} \quad (3.2/28)$$

Die inverse diskrete Fourier-Transformierte

$$h_o(v) = \frac{1}{n+1} \sum_{\mu=0}^n \hat{h}_o(\mu) e^{j\mu v 2\pi/(n+1)} \quad (3.2/29)$$

ermöglicht dann die Zerlegung von $h_o(v)$ in $n+1$ Summanden und damit auch eine entsprechende Zerlegung der Matrix $\underline{H}_0$

$$\underline{H}_O = \frac{1}{n+1} \sum_{\mu=0}^n \hat{H}_{O\mu} \quad (3.2/30)$$

in eine Summe von $n + 1$ Faltungsmatrizen $\hat{H}_{O\mu}$, die einfacher zusammengesetzt sind:

$$\hat{H}_{O\mu} = \hat{h}_O(\mu) \begin{bmatrix} \epsilon^{\mu n} & \epsilon^{\mu(n-1)} & \dots & \epsilon^{\mu} & \epsilon^0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \epsilon^{\mu n} & \dots & \epsilon^{2\mu} & \epsilon^{\mu} & \epsilon^0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon^{\mu(n-1)} & \epsilon^{\mu(n-2)} & \dots & \epsilon^0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \epsilon^{\mu n} \end{bmatrix} \quad (3.2/31)$$

Dabei wurde zur Abkürzung die Größe

$$\epsilon = e^{j2\pi/(n+1)} \quad (3.2/32)$$

eingeführt.

Es ist nun leicht einzusehen, daß die in Bild 3/3 gezeigte Anordnung eine direkte Realisierung des betrachteten Systems darstellt. Sie ist i.a. weniger aufwendig als die in Bild 3/2 gezeigte, zu (3.2/19) äquivalente Realisierung. Nur wenn die Eingangsfunktion aus einem einzigen nicht-verschwindenden Zahlenwert besteht ($L=1$, $N=n+1$), sind die beiden Realisierungen identisch. Mit zunehmender Länge der Eingangsfunktion erfolgt jedoch eine Aufblähung der in Bild 3/2 dargestellten Struktur. Abgesehen von dem Sonderfall $L=1$ ist also eine Realisierung des Systems über die diskrete Fourier-Transformation nach (3.2/19) grundsätzlich aufwendiger als die direkte Realisierung, wenn die Operationen DFT und IDFT nicht durch besondere Algorithmen effektiver gemacht werden.

Realisiert man ein nichtrekursives System über die diskrete Fourier-Transformation nach (3.2/19), so spricht man von "schneller Faltung", wenn dabei Algorithmen der schnellen Fourier-Transformation zur Anwendung kommen. Wir wollen nun einen Aufwandsvergleich zwischen der direkten Realisierung eines nichtrekursiven Systems und der schnellen Faltung durchführen. Da wir für die schnelle Faltung keine ähnlich einfachen äquivalenten Strukturen wie die in Bild 3/2 gezeigte angeben können, wählen wir als Vergleichsbasis die Anzahl der jeweils erforderlichen Multiplikationen. Wir beschränken uns dabei auf Werte von N , die als Zweierpotenzen darstellbar sind:

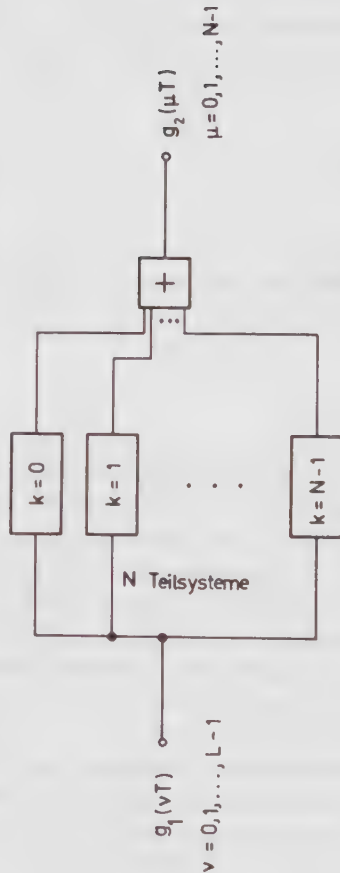
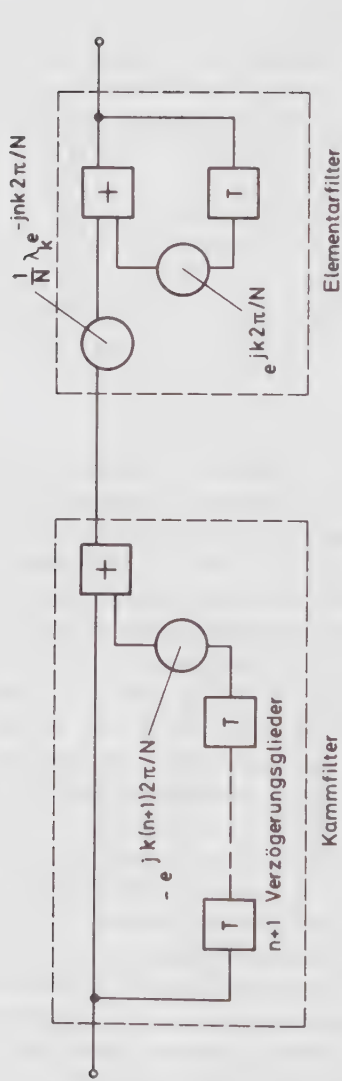


Bild 3/2: Schaltungsanordnung, die der Ausführung der diskreten Faltung via DFT entspricht.

- a) k -tes Teilsystem mit der Impulsantwort h_{ok} b) Gesamtsystem

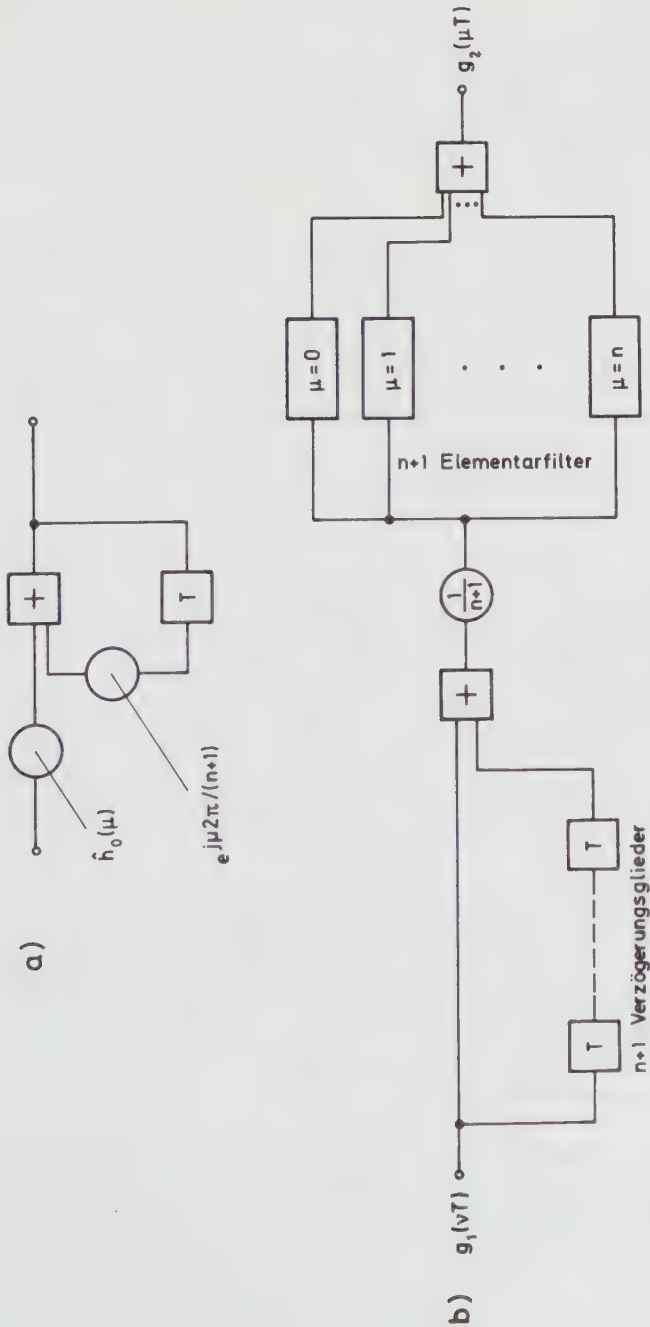


Bild 3/3: Schaltungsstruktur entsprechend dem Frequenzabstastverfahren.

a) μ -tes Elementarfilter b) Gesamtsystem

$$N = 2^p, p > 1, \text{ ganzzahlig} \quad (3.2/33)$$

Nach (2.3/11) sind dann für jede Operation DFT bzw. IDFT rund $\frac{N}{2}(p-1)$ Multiplikationen erforderlich. Die schnelle Faltung erfordert drei Transformationen und N Multiplikationen für die Bildung des Produktes von $\underline{A}_0$ mit $\underline{W} \underline{g}_1$ in (3.2/19). Das ergibt insgesamt

$$M_{SF} = \frac{3}{2} N(p-1) + N = \frac{N}{2}(3p-1) = 2^{p-1}(3p-1) \quad (3.2/34)$$

Multiplikationen für die Ausführung der schnellen Faltung.

Andererseits entspricht die direkte Realisierung des Systems der direkten Ausführung der diskreten Faltung (3.2/11) mit insgesamt

$$M_{DF} = (n+1)L = (n+1)(N-n) = (n+1)(2^p-n) \quad (3.2/35)$$

Multiplikationen.

In Bild 3/4 sind M_{SF} und M_{DF} für verschiedene Werte von p und n dargestellt. Man sieht, daß die schnelle Faltung etwa für $n \geq 30$ im Bereich $p \leq 12$ günstiger ist als die direkte Faltung. Mit zunehmender Länge L der Eingangsfunktion gibt es jedoch für jeden Systemgrad n eine obere Grenze in der Effektivität der schnellen Faltung, weil für große p -Werte M_{DF} proportional zu 2^p , M_{SF} aber proportional zu $p \cdot 2^p$ wächst. Diese Effektivitätsgrenze liegt für $p \geq 10$ etwa bei $p_{Gr} = \frac{1}{3} n$ (Bild 3/4).

Anschaulich erklärt sich dieses ungünstige Phänomen bei der schnellen Faltung dadurch, daß die nicht-verschwindenden Elemente der Matrix $\underline{H}_0$ für $n \ll N$ praktisch auf einen schmalen Bereich in der Umgebung der Hauptdiagonalen konzentriert sind, so daß der Gewinn bei der Diagonalisierung durch den für die Ausführung der schnellen Fourier-Transformation erforderlichen zusätzlichen Aufwand überkompensiert wird.

Als Ausweg bietet sich die Möglichkeit an, die schnelle Faltung segment-weise auszuführen. Hierzu sind zwei Methoden angegeben worden. Die erste, unabhängig von STOCKHAM [3] und HELMS [16] entwickelt, wird "overlap-save"- oder auch "select-save"-Methode

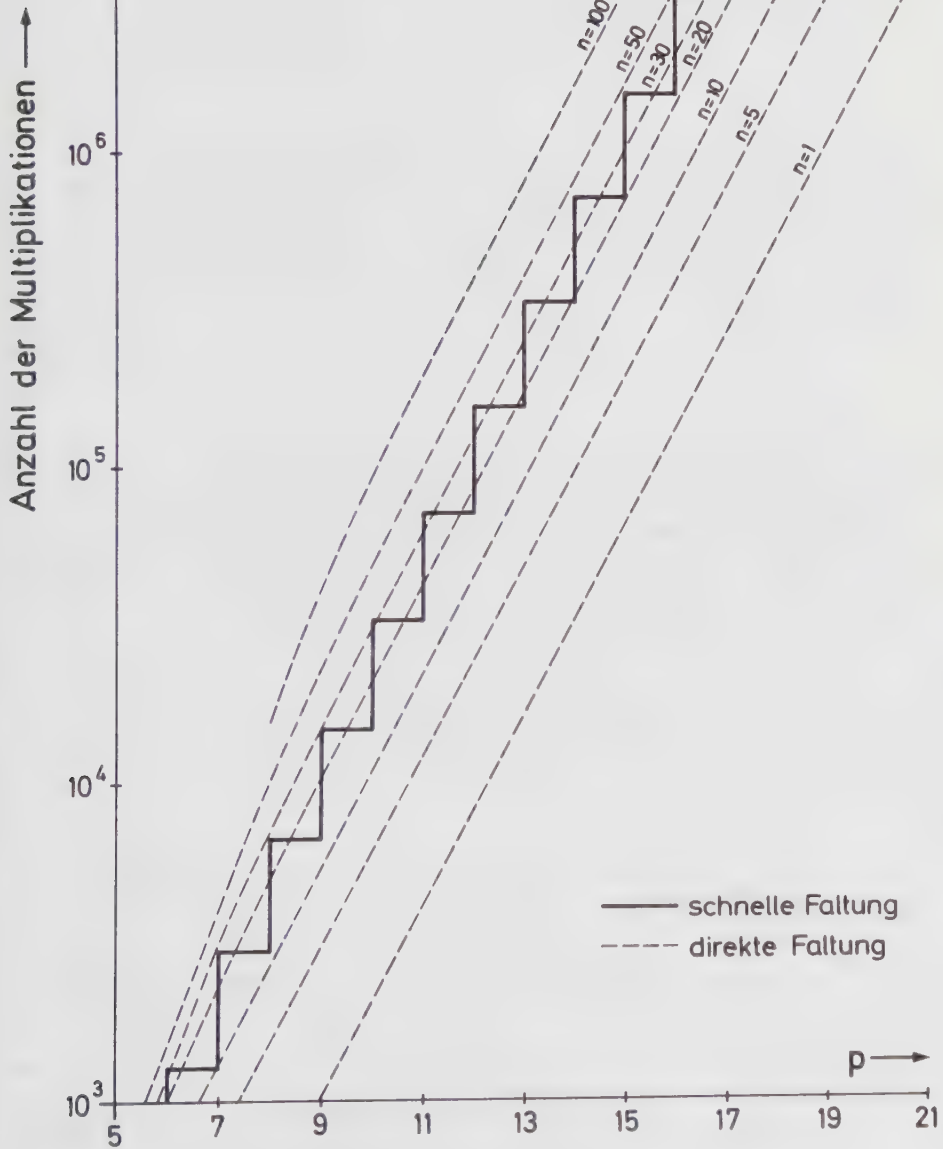


Bild 3/4: Aufwandsvergleich zwischen schneller und direkter Faltung ohne Segmentierung.

genannt. Hier wird die aus L Werten bestehende Eingangsfolge in Segmente von je N Werten unterteilt, die sich jeweils um n Werte überlappen. Das erste Segment enthält n Nullelemente und die Werte $q_1(0)$ bis $q_1(K-1)$, wobei

$$K = N - n > n \quad (3.2/36)$$

sein soll. Im zweiten Segment befinden sich die Werte $q_1(K-n)$ bis $q_1(2K-1)$ usw. Die Segmentlänge N soll eine für die schnelle Fourier-Transformation günstige Zahl, beispielsweise eine Zweierpotenz sein. Wir können weiterhin davon ausgehen, daß die Gesamtzahl $L+n$ der Ausgangswerte als ganzzahliges Vielfaches von K darstellbar ist,

$$n+L = r_{os} K = r_{os}(N-n), \quad r_{os} \geq 1, \text{ ganzzahlig,} \quad (3.2/37)$$

was nötigenfalls durch Abschneiden der Eingangsfolge oder durch Verlängerung mit Nullelementen stets erreichbar ist. Im ersten Fall wird der Rest getrennt verarbeitet, im zweiten Fall ergibt sich ein zusätzlicher Mehraufwand, der aber gegenüber der Gesamtersparnis im Aufwand durch Anwendung der schnellen Faltung i.a. nicht ins Gewicht fällt. Für den bei der Signalverarbeitung häufig vorliegenden Fall $L \gg N$ ist dieses Problem ohnehin irrelevant.

Jedes Segment liefert K Werte der Ausgangsfolge. Im ρ -ten Segment ($\rho = 0, 1, \dots, r_{os}-1$) werden beispielsweise die Werte $q_2(\rho K)$ bis $q_2((\rho+1)K-1)$ berechnet. Das Faltungsschema dazu sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{bmatrix} q_2(\rho K) \\ q_2(\rho K+1) \\ \vdots \\ q_2((\rho+1)K-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0(n) & h_0(n-1) & \dots & h_0(0) & \overbrace{0 \dots 0}^{K-1 \text{ Nullelemente}} \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & 0 & \dots & 0 & h_0(n) & h_0(n-1) & \dots & h_0(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(\rho K-n) \\ \vdots \\ q_1(\rho K) \\ q_1(\rho K+1) \\ \vdots \\ q_1((\rho+1)K-1) \end{bmatrix} \quad (3.2/38)$$

Die Rechteckmatrix hierin besitzt K Zeilen und N Spalten. Man überzeugt sich leicht, daß die Aneinanderreihung der Segmente (3.2/38) für $\rho = 0$ bis $\rho = r_{os}-1$ wieder das gesamte Faltungsschema für die Berechnung von a_2 liefert. Weiterhin ist zu beachten, daß die Segmentierung allein die Anzahl der für die Ausführung der diskreten Faltung $h_o * a_1$ insgesamt erforderlichen Multiplikationen noch nicht verändert.

Um nun alle Segmente mit Hilfe der schnellen Faltung ausrechnen zu können, muß man die Rechteckmatrix in (3.2/38) durch Anhängen von n Zeilen wieder zur quadratischen Matrix H_o entsprechend (3.2/14) ergänzen. Die Ausmultiplikation von (3.2/38) liefert dann als Ergebnis einen N-zeiligen Spaltenvektor. Die ersten K Elemente dieses Spaltenvektors entsprechen den in (3.2/38) angegebenen Werten der Ausgangsfolge. Die übrigen n Werte sind unbrauchbar.

Die zweite Methode zur segmentweisen Ausführung der schnellen Faltung stammt von STOCKHAM [12] und wird "overlap-add"-Methode genannt [3]. Der Unterschied zur overlap-save-Methode besteht darin, daß die hier gebildeten Segmente sich nunmehr in der Ausgangsfolge um jeweils n Werte überlappen, während die Eingangsfolge zu jedem Segment nur K Werte beisteuert. Diese K Werte und weitere n Null-elemente bilden den N-zeiligen Vektor, auf den die zu H_o ergänzte Faltungsmatrix angewendet wird. Das ρ -te Segment hat dann die Form

$$\begin{bmatrix} y_\rho(0) \\ y_\rho(1) \\ \vdots \\ y_\rho(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_o(n) & h_o(n-1) & \dots & h_o(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_o(n) & \dots & h_o(1) & h_o(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_o(n-1) & \dots & h_o(0) & \underbrace{0 \dots 0}_{K-1} & h_o(n) & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sigma_1(\rho K) \\ \sigma_1(\rho K+1) \\ \vdots \\ \sigma_1(\rho K+K-1) \end{bmatrix} \quad (3.2/39)$$

Das Ergebnis dieser Operation, ein N-zeiliger Vektor, den wir y_ρ nennen, stimmt in seinem mittleren Teil mit den entsprechenden Elementen der Ausgangsfolge überein:

$$y_{\rho}(l) = g_2(\rho K + l) \quad \text{für } l = n, n+1, \dots, K-1 \quad (3.2/40)$$

Die ersten n und die letzten n Elemente von y_{ρ} sind i.a. nur Teilsummen entsprechender Elemente der Ausgangsfolge. Benachbarte Segmente sind jedoch bezüglich dieser Teilsummen komplementär: Die Überlappung ihrer Ergebnisse, etwa y_{ρ} und $y_{\rho+1}$, um jeweils n Werte liefert die entsprechenden Elemente der Ausgangsfolge als Summe der zur Deckung kommenden Elemente von y_{ρ} und $y_{\rho+1}$:

$$g_2(\rho K + K + v) = y_{\rho}(K + v) + y_{\rho+1}(v) \\ \text{für } v = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.2/41)$$

Gehen wir bei der overlap-add-Methode davon aus, daß hier die Länge L der Eingangsfolge als ganzzahliges Vielfaches von K darstellbar ist

$$L = r_{\text{oa}} K = r_{\text{oa}} (N-n), \quad r_{\text{oa}} \geq 1 \text{ ganzzahlig,} \quad (3.2/42)$$

so ergeben sich die ersten n Elemente der Ausgangsfolge aus

$$g_2(\mu) = y_0(\mu), \quad (3.2/43)$$

die letzten n Elemente aus

$$g_2(r_{\text{oa}} K + \mu) = y_{r_{\text{oa}}-1}(K + \mu) \quad (3.2/44)$$

für $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ und die übrigen Elemente aus (3.2/40) bzw. (3.2/41) für $\rho = 0, 1, \dots, r_{\text{oa}}-1$.

Die overlap-add-Methode erfordert im wesentlichen den gleichen Aufwand wie die overlap-save-Methode. Sie bringt einige zusätzliche Additionen mit sich, kann aber andererseits, wenn die Erfüllung der Bedingung (3.2/42) durch Kürzen bzw. Verlängern der Eingangsfolge erzwungen wird, etwas günstiger abschneiden als die overlap-save-Methode [3]. Sehen wir von diesen i.a. geringfügigen Unterschieden ab, so fordern beide Methoden bei r Segmenten zu je $N=2^P$ Zeilen die Ausführung von rund

$$\begin{aligned}
 M_{SSF} &= \frac{N}{2} (p-1) + r N(p-1) + r N = \\
 &= \frac{N}{2} (p-1) + r N p \quad (3.2/45)
 \end{aligned}$$

Multiplikationen. Dabei ist berücksichtigt, daß die DFT der Impulsantwort nur einmal ausgeführt wird, pro Segment eine DFT und eine IDFT von je N Werten vorzunehmen ist und die diskreten Fourier-Transformierten der Eingangsfolge und der Impulsantwort miteinander multipliziert werden müssen.

Die Segmentlänge N ist optimal, wenn der im Mittel für einen einzelnen Ausgangswert erforderliche Aufwand minimal ist. Jedes Segment liefert N-n Ausgangswerte bei einem Aufwand von rund Np Multiplikationen. Der im Mittel pro Ausgangswert erforderliche Aufwand ist dann

$$A = \frac{N p}{N-n} = \frac{p}{1-h/N} = \frac{p}{1-n2^{-p}} \quad (3.2/46)$$

Die optimale Segmentlänge N_{opt} ergibt sich aus dem ganzzahligen Wert $p = p_{opt}$, für den A minimal ist. Ein Schätzwert für p_{opt} läßt sich dadurch gewinnen, daß wir zunächst das Minimum von A bezüglich einer kontinuierlich veränderbaren Variablen p bestimmen:

$$\frac{dA}{dp} = \frac{1-n2^{-p}-pn2^{-p}\ln 2}{(1-n2^{-p})^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.2/47)$$

Hieraus folgt die transzendente Gleichung

$$2^p = n(1+p\ln 2) \quad (3.2/48)$$

die für positives p und $n > 1$ genau eine Lösung besitzt. Die Berechnung der zweiten Ableitung von A zeigt, daß diese Lösung immer auf ein Minimum von A führt:

$$\begin{aligned}
 (1-n2^{-p})^4 \frac{d^2 A}{dp^2} &= (1-n2^{-p})^2 n p 2^{-p} (\ln 2)^2 - \\
 &- 2(1-n2^{-p}) n (\ln 2) 2^{-p} (1-n2^{-p}-p n 2^{-p} \ln 2) \quad (3.2/49)
 \end{aligned}$$

Setzt man (3.2/48) ein, so verschwindet der zweite Summand in (3.2/49), und es gilt

$$\left\{ \frac{d^2 A}{dp^2} \right\}_{\text{opt}} = \frac{n p 2^{-p} (\ln 2)^2}{(1-n 2^{-p})^2} > 0. \quad (3.2/50)$$

Einige numerische Beispiele zeigt Bild 3/5. Hier ist der mittlere Aufwand A in der Umgebung der optimalen Segmentlänge für verschiedene Werte von n dargestellt. In allen Fällen ist P_{opt} gleich demjenigen ganzzahligen Wert von p , der die Lösung der transzendenten Gleichung (3.2/48) im Sinne von

$$|2^p - n(1+p \ln 2)| \stackrel{!}{=} \min \quad (3.2/51)$$

approximiert. Tabelle 3/1 gibt die optimalen Segmentlängen

$$N_{\text{opt}} = 2^{P_{\text{opt}}} \quad (3.2/52)$$

und den zugehörigen minimalen Aufwand

$$A_{\min} = \frac{P_{\text{opt}}}{1-n 2^{-P_{\text{opt}}}} \quad (3.2/53)$$

für verschiedene Werte von n an.

Tabelle 3/1: Optimale Segmentlängen

n	P_{opt}	N_{opt}	$A_{\min}$
5	4	16	5,82
10	6	64	7,11
20	7	128	8,30
50	8	256	9,94
100	10	1024	11,08
200	11	2048	12,19
500	12	4096	13,67
1000	13	8192	14,81

Der Vergleich zwischen der schnellen Faltung und der direkten Ausführung der diskreten Faltung fällt nun wesentlich günstiger für die schnelle Faltung aus, wenn man in optimaler Weise seg-

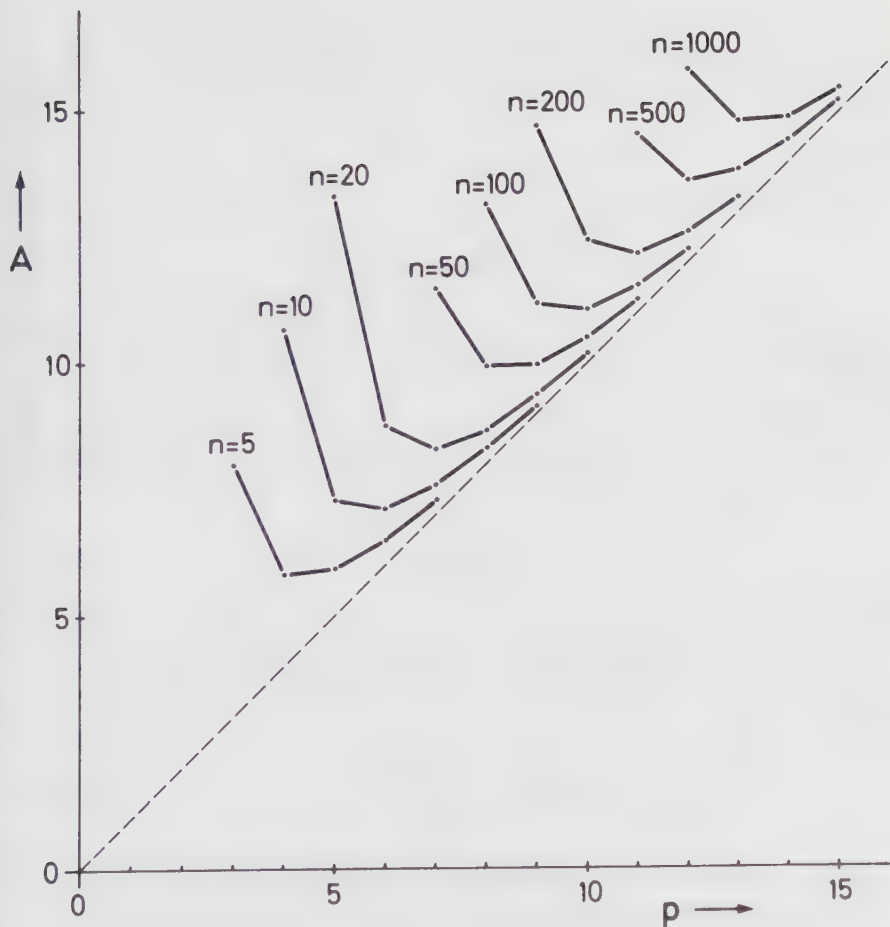


Bild 3/5: Mittlerer Aufwand für die Berechnung eines Ausgangswertes bei der segmentweisen Ausführung der schnellen Faltung. (2^p =Segmentlänge, $n+1$ = Länge der Impulsantwort).

mentiert. Bild 3/6 zeigt für einige Werte von n die Anzahl der in beiden Fällen erforderlichen Multiplikationen. Für die schnelle Faltung ist der Optimalwert von M_{SSF} als Funktion von r aufgetragen. Für die direkte Ausführung ist M_{DF} nach (3.2/35) dargestellt, wobei die Gesamtlänge der Eingangsfolge aus der für die overlap-save-Methode gültigen Beziehung (3.2/37) bestimmt wurde:

$$L_{ges} = r(N-n) - n \quad (3.2/54)$$

Hieraus ergibt sich

$$M_{DF} = (n+1)L_{ges} = (n+1)(r(N-n)-n) \quad (3.2/55)$$

Die schnelle Faltung wird bei dem Vergleich etwas begünstigt, weil angenommen wurde, daß die Segmentierung ohne Rest aufgeht.

Insgesamt wird der zur Ausführung der diskreten Faltung erforderliche Aufwand durch Anwendung der schnellen Faltung (overlap-save-Methode) um den Faktor

$$q = \frac{\frac{N}{2}(p-1) + r N p}{(n+1)(r(N-n)-n)} \quad (3.2/56)$$

reduziert. Bild 3/7 zeigt, daß dabei beträchtliche Gewinne insbesondere für hochgradige Systeme (großes n) erzielt werden können. Bei sehr langen Eingangsfolgen hängt q praktisch nur noch von n ab:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} q = \frac{N p}{(n+1)(N-n)} = \frac{A_{min}}{n+1} \quad (3.2/57)$$

Für $n > 100$ benötigt die schnelle Faltung dann weniger als 10 % und für $n > 1000$ weniger als 1,5 % des Aufwandes, der für die direkte Ausführung erforderlich wäre.

In vielen Anwendungsfällen, insbesondere bei der Filterung von Signalen bestehen die zu faltenden Folgen $\{h_0(\mu)\}$ und $\{q_1(\mu)\}$ aus rein reellen Zahlenwerten. Hier ist nach STOCKHAM [12] eine weitere Reduzierung des Aufwandes auf rund die Hälfte möglich, indem man jeweils zwei entsprechende Elemente aufeinander folgender Segmente der Ein-

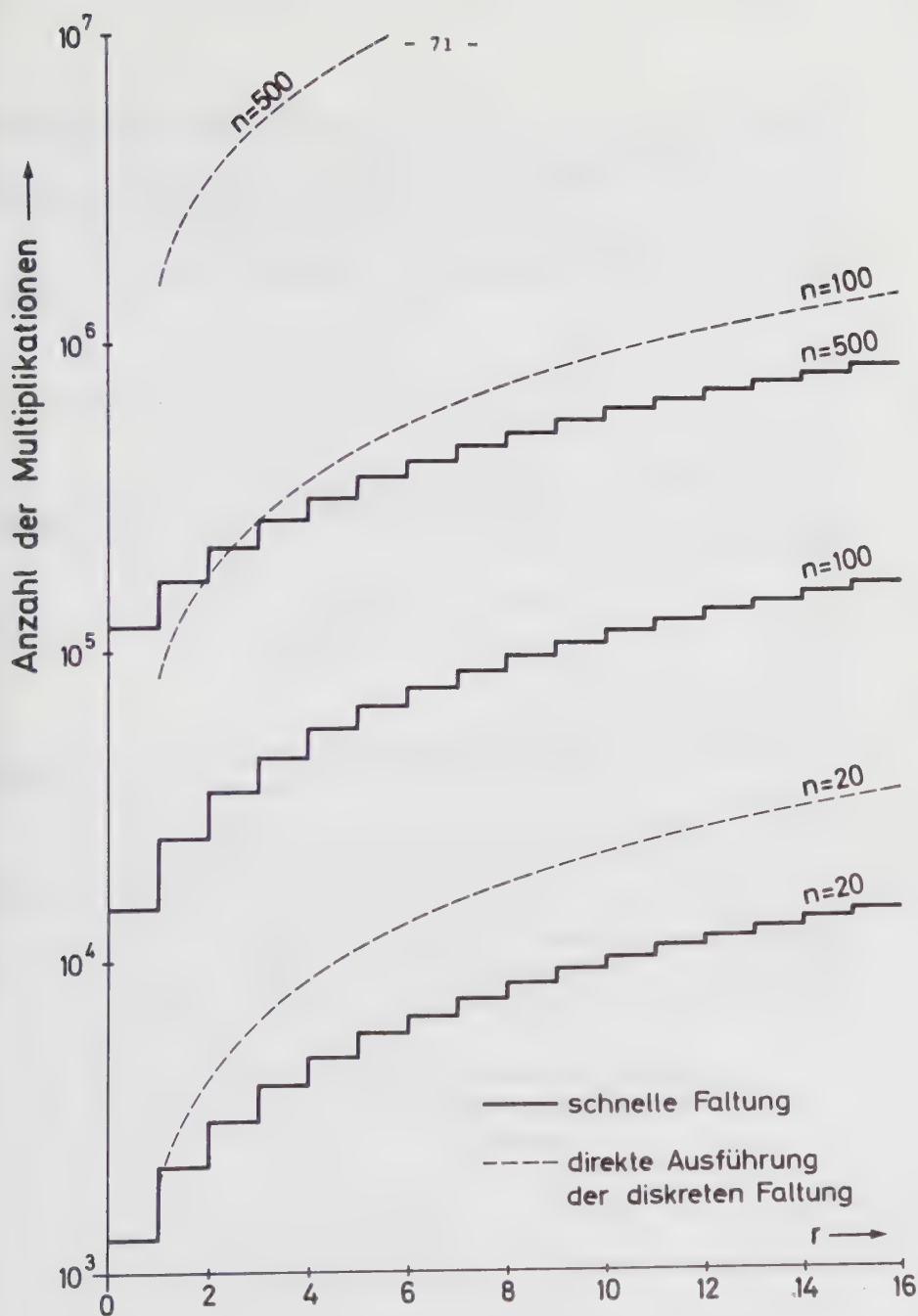


Bild 3/6: Gesamtaufwand bei schneller Faltung (mit Segmentierung) und direkter Ausführung der diskreten Faltung.

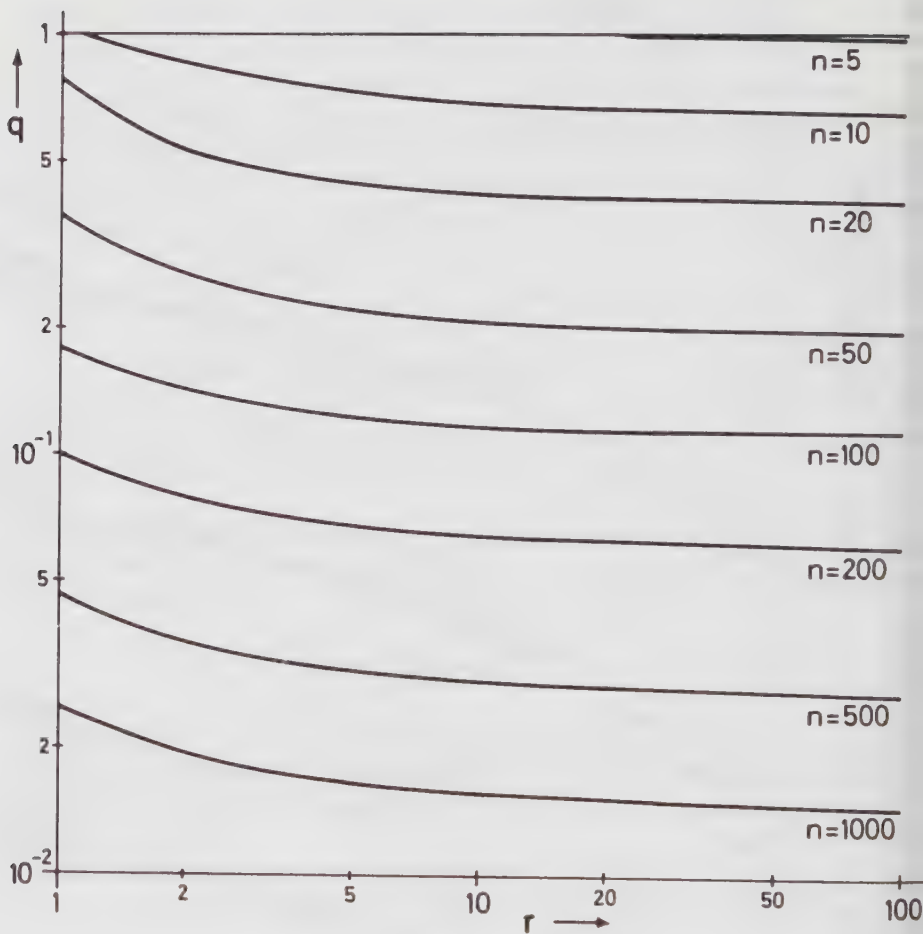


Bild 3/7: Aufwandsverhältnis q von schneller zu direkter Faltung in Abhängigkeit von der Anzahl r der Segmente.

gangsfolge $\{g_1(u)\}$ als Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl interpretiert. Aus zwei Segmenten, die nur reelle Zahlen enthalten, wird so ein Segment mit komplexen Zahlen gebildet. Nehmen wir etwa bei der overlap-add-Methode an, daß die Anzahl r_{oa} der Segmente gerade sei. Dann werden einander entsprechende Eingangselemente des ρ -ten (ρ gerade) und des $(\rho+1)$ -ten Segmentes zu je einer komplexen Zahl

$$g_1(rK+v) = g_1(\rho K+v) + j g_1((\rho+1)K+v) \quad (3.2/58)$$

$$\rho = 2r, \quad r = 0, 1, \dots, \frac{1}{2} r_{oa}$$

zusammengefaßt. Die so entstandene Folge $\{\hat{g}_1\}$, die nur noch aus $\frac{1}{2} r_{oa}$ Segmenten der Länge N besteht, wird nun anstelle der ursprünglichen Folge $\{g_1\}$ mit $\{h_0\}$ gefaltet. Das Ergebnis dieser Faltung, eine komplexe Folge

$$\hat{y}_r(v) = y_\rho(v) + j y_{\rho+1}(v) \quad (3.2/59)$$

führt nach Trennung von Realteil und Imaginärteil wieder auf benachbarte Segmente der gesuchten Ausgangsfolge.

Bei der diskreten Faltung reeller Zahlenfolgen ist zu beachten, daß das Aufwandsverhältnis zwischen schneller und direkter Faltung gegenüber den obigen Betrachtungen um einen Faktor 2 zugunsten der letzteren verschoben wird, denn die direkte Faltung erfordert in diesem Fall nur M_{DF} reelle Multiplikationen, während der Aufwand für die schnelle Faltung $\frac{1}{2} M_{SF}$ komplexen, d.h. im wesentlichen $2 M_{SF}$ reellen Multiplikationen entspricht. Das Aufwandsverhältnis ist in diesem Fall also etwa durch $2q$ gegeben.

3.3 Rekursive Systeme

Wir knüpfen an Abschnitt 3.1 an und betrachten den allgemeinen Fall der Differenzengleichung (3.1/2), wo alle Koeffizienten c_v von Null verschieden sein dürfen. Um den bereits behandelten Sonderfall der nichtrekursiven Systeme auszuschließen, setzen wir voraus, daß außer c_n mindestens ein weiterer Koeffizient c_v ungleich Null ist. Weiterhin müssen wir zusätzlich die Stabilität des Systems in dem Sinne fordern, daß jedes beschränkte Eingangssignal ein beschränktes Ausgangssignal hervorruft. Notwendig und hinreichend hierfür ist die an die Impulsantwort $h_o(v)$ zu stellende Bedingung [22]

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h_o(k)| < M < \infty. \quad (3.3/1)$$

Wenn wir davon ausgehen, daß die Anfangswerte der Differenzengleichung nach (3.1/4) und (3.1/5) verschwinden, so ergibt sich die Impulsantwort $h_o(k)$ als Systemreaktion auf die spezielle Eingangsfunktion $q_1(k) = \delta_{ok}$.

Die Differenzengleichung (3.1/2) lautet in diesem Fall

$$\sum_{v=0}^n c_{n-v} h_o(k-v) = \sum_{\mu=0}^m b_{m-\mu} \delta_{o,k-\mu}. \quad (3.3/2)$$

Da $h_o(k)$ für $k < 0$ wegen der Kausalität des Systems verschwindet, ergeben sich die Werte der Impulsantwort für $k \geq 0$ aus der Rekursionsformel

$$h_o(k) = \frac{1}{c_n} \sum_{\mu=0}^m b_{m-\mu} \delta_{o,k-\mu} - \frac{1}{c_n} \sum_{v=1}^n c_{n-v} h_o(k-v). \quad (3.3/3)$$

Obwohl der unmittelbare Einfluß des Eingangsimpulses δ_{ok} , der durch die erste Summe auf der rechten Seite von (3.3/3) beschrieben wird, für $k > m$ verschwindet, ist die zweite Summe, die der Rückwirkung der Ausgangsfunktion auf das System entspricht, im allgemeinen von Null verschieden. Das bedeutet, daß die Impulsantwort rekursiver Systeme nicht von endlicher Länge ist. Wegen dieser Eigenschaft sind die im Abschnitt 3.2 beschriebenen Methoden der schnellen Faltung nicht ohne weiteres auf rekursive Systeme übertragbar. Eine Begründung dieser Feststellung wird sich aus

dem folgenden ergeben.

Das Gleichungssystem (3.1/7), aus dem sich bei verschwindenden Anfangswerten der Differenzengleichung die ersten L Werte der Ausgangsfunktion ergeben, läßt sich in Matrizenform folgendermaßen darstellen:

$$\begin{bmatrix}
 c_n & 0 & . & . & . & . & 0 \\
 c_{n-1} & c_n & & & & & . \\
 c_{n-2} & c_{n-1} & c_n & & & & . \\
 \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & c_0 & c_1 & \dots & c_n
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 q_2(0) \\
 q_2(1) \\
 q_2(2) \\
 \vdots \\
 q_2(L-1)
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 b_m & 0 & . & . & . & . & 0 \\
 b_{m-1} & b_m & & & & & . \\
 b_{m-2} & b_{m-1} & b_m & & & & . \\
 \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_m
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 q_1(0) \\
 q_1(1) \\
 q_1(2) \\
 \vdots \\
 q_1(L-1)
 \end{bmatrix}
 \quad (3.3/4)$$

Die beiden Matrizen hierin haben die untere Dreiecksform und enthalten auf ihren Diagonalen jeweils gleiche Elemente, die Koeffizienten c_v bzw. b_v in der angedeuteten Reihenfolge. Wir bezeichnen die Matrizen mit $\underline{C}$ bzw. $\underline{B}$ und die Spaltenvektoren (abweichend von Abschnitt 3.2) mit $\underline{q}_2$ bzw. $\underline{q}_1$. Das Gleichungssystem (3.3/4) läßt sich dann durch

$$\underline{C} \underline{q}_2 = \underline{B} \underline{q}_1 \quad (3.3/5)$$

zusammenfassen. Da $\underline{C}$ für $c_n \neq 0$ regulär ist, kann (3.3/5) stets nach $\underline{q}_2$ aufgelöst werden, und zwar durch eine einfache Rekursion, wie beispielsweise (3.1/7) zeigt.

$$\underline{q}_2 = \underline{C}^{-1} \underline{B} \underline{q}_1 \quad (3.3/6)$$

Die Matrix $\underline{C}^{-1} \underline{B}$ hat wieder die untere Dreiecksform, da die Inverse einer (unteren) Dreiecksmatrixform ebenfalls eine (untere) Dreiecksmatrix ist und das Produkt zweier (unterer) Dreiecksmatrizen auch auf eine (untere) Dreiecksmatrix führt (z.B. [5]). Weiterhin folgt aus der Zeitinvarianz, daß das System auf die Eingangsfunktion $q_1(k) = \delta_{k0}$ bei verschwindenden Anfangswerten immer mit der entsprechend zeitlich verschobenen Impulsantwort $h_0(k-l)$ reagiert. Es gilt daher

$$g_2 = \underline{H}_0 g_1, \quad (3.3/7)$$

wobei die Matrix $\underline{H}_0$ (abweichend von Abschnitt 3.2) durch

$$\underline{H}_0 = \underline{C}^{-1} \underline{B} = \begin{bmatrix} h_0(0) & 0 & . & . & . & . & 0 \\ h_0(1) & h_0(0) & & & & & . \\ h_0(2) & h_0(1) & h_0(0) & & & & . \\ \vdots & & & \ddots & & & 0 \\ h_0(L-1) & h_0(L-2) & . & . & . & . & h_0(0) \end{bmatrix} \quad (3.3/8)$$

definiert ist. Die Beziehung (3.3/7) entspricht der diskreten Faltung von Eingangs- und Ausgangsfolge. Die k-te Zeile lautet:

$$g_2(k) = \sum_{\mu=0}^{L-1} h_0(\mu) g_1(k-\mu) = h_0 * g_1 \quad (3.3/9)$$

$$\text{mit } 0 \leq k \leq L-1$$

Es ist nun nicht schwierig, das Gleichungssystem (3.3/7) so zu erweitern, daß die Matrix $\underline{H}_0$ ohne Veränderung der L Gleichungen in (3.3/7) zu einer Matrix zyklischer Bauart ergänzt werden kann:

$$\begin{bmatrix} g_2(0) \\ g_2(1) \\ \vdots \\ g_2(L-1) \\ \gamma(L) \\ \gamma(L+1) \\ \vdots \\ \gamma(2L-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{h_0(0) \quad 0 \quad . \quad . \quad . \quad 0}^L & h_0(L-1) & h_0(L-2) & \dots & h_0(1) \\ h_0(1) & h_0(0) & 0 & . \quad . \quad . & 0 & h_0(L-1) & \dots & h_0(2) \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ h_0(L-1) & . \quad . \quad . \quad . \quad . & h_0(0) & 0 & . \quad . \quad . \quad 0 & . \\ . & . & & & & & & . \\ . & . & & & & & & . \\ . & . & & & & & & . \\ \underbrace{0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 0}_L & h_0(L-1) & \dots & h_0(1) & h_0(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_1(1) \\ \vdots \\ q_1(L-1) \\ \left. \begin{matrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{matrix} \right\} L \end{bmatrix} \quad (3.3/10)$$

Der Spaltenvektor der Eingangsfunktion wird dabei um L Null-elemente verlängert. Die ersten L Gleichungen in (3.3/10) ergeben wieder die entsprechenden Werte der Ausgangsfunktion. Die übrigen L Gleichungen führen auf Werte $\gamma(v)$, die nur Teilsummen der Ausgangswerte $q_2(L)$ bis $q_2(2L-1)$ darstellen und nicht verwendet werden.

Die Lösung des erweiterten Gleichungssystems (3.3/10) kann nun mit Hilfe der schnellen Faltung wie in (3.2/17) und (3.2/18) erfolgen. Wir vergleichen zunächst den Aufwand, der mit der schnellen Faltung einerseits und mit der direkten Lösung der Differenzengleichung andererseits verbunden ist. Bei der schnellen Faltung sind drei diskrete Fourier-Transformationen zu je 2L Werten auszuführen. Hinzu kommen 2L Multiplikationen bei der Bildung des Produktes zwischen den diskreten Fourier-Transformierten von Impulsantwort und Eingangsfolge. Nehmen wir an, daß L eine Zweierpotenz ist, etwa

$$L = 2^{p-1}, \quad p \text{ ganzzahlig}, \quad (3.3/11)$$

so erfordert die schnelle Faltung nach (3.2/34)

$$M_{SF} = L (3p-1) = 2^{p-1} (3p-1) \quad (3.3/12)$$

Multiplikationen. Bei der rekursiven Lösung der Differenzengleichung nach (3.1/7) sind andererseits rund

$$M_{DG} = L (m+n+1) = 2^{p-1} (m+n+1) \quad (3.3/13)$$

Multiplikationen auszuführen. Das Aufwandsverhältnis

$$\frac{M_{SF}}{M_{DG}} = \frac{3p-1}{m+n+1} \quad (3.3/14)$$

fällt somit für nicht zu lange Datenfolgen ($3p < m+n+2$) zu gunsten der schnellen Faltung aus. Darüber hinaus wird die schnelle Faltung in der eben beschriebenen unsegmentierten Form ineffektiv. Ein weiterer Gesichtspunkt, der bei der Verarbeitung langer Datenfolgen hinzukommt, ist der erforderliche Zeit- und Speicheraufwand. Da bei dem eben betrachteten Verfahren der schnellen Faltung der letzte Wert der Eingangsfolge bekannt sein muß, be-

vor der erste Wert der Ausgangsfolge berechnet werden kann, erreicht man sehr schnell die Grenzen, die durch die höchstzulässige Verzögerung des Systems und die Speicherkapazität des verwendeten Digitalrechners gegeben sind. Gewisse Anwendungen, wie beispielsweise die fortlaufende Filterung seismischer Signale schließen das Verfahren von vornherein aus.

Als Ausweg bieten sich zwei Möglichkeiten an. Die erste besteht darin, das rekursive System nur näherungsweise zu realisieren, indem man nach einem Vorschlag von HELMS [16] die Impulsantwort außerhalb eines hinreichend groß gewählten, aber endlichen Zeitintervalles, das den signifikanten Verlauf von h_0 enthält, vernachlässigt und gleich Null setzt. Man approximiert damit indirekt das rekursive System durch ein nichtrekursives und kann dann die schnelle Faltung unter Anwendung der im Abschnitt 3.2 beschriebenen Methoden segmentweise ausführen.

Die andere Methode geht auf einen Vorschlag von GOLD und JORDAN [21] zurück und wurde von CHANOUX [23], sowie von VOELCKER und HARTQUIST [24] untersucht. Diese Methode soll im Rahmen der hier gewählten Darstellungsform ausführlicher beschrieben werden.

Das zentrale Problem besteht darin, einen endlichen Ausschnitt der i.a. zeitlich nicht begrenzten Systemreaktion durch endliche Faltungsprodukte zu beschreiben. Gesucht seien beispielsweise die L aufeinanderfolgenden Ausgangswerte $g_2(k_0)$ bis $g_2(k_0+L-1)$, wobei k_0 der Anfangszeitpunkt des betrachteten Ausschnittes sein soll. Die entsprechenden Eingangswerte seien $g_1(k_0)$ bis $g_1(k_0+L-1)$. Wenn zusätzlich die vor dem betrachteten Zeitabschnitt anliegenden Eingangswerte $g_1(k_0-1)$ bis $g_1(k_0-m)$ und Ausgangswerte $g_2(k_0-1)$ bis $g_2(k_0-n)$ bekannt sind, lassen sich die gesuchten Ausgangswerte eindeutig aus der Differenzengleichung (3.3/2) ermitteln. Wegen der vorausgesetzten Zeitinvarianz des Systems können wir k_0 ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Null setzen, müssen dann aber beachten, daß gegenüber (3.1/4) und (3.1/6) nun die vorhergehenden Eingangswerte $g_1(-1)$ bis $g_1(-m)$ und Ausgangswerte $g_2(-1)$ bis $g_2(-n)$ i.a. nicht verschwinden. Wir gewinnen somit einen Anschluß an die oben gewählte Schreibweise. Die nunmehr zwischen Eingangs- und Ausgangsfolge bestehende Beziehung

$$\underline{C} \underline{q}_2 + \underline{a}_2 = \underline{B} \underline{q}_1 + \underline{a}_1 \quad (3.3/15)$$

ist gegenüber (3.3/5) um zwei additiv hinzukommende L-zeilige Spaltenvektoren, die die Anfangsbedingungen tragen, erweitert:

$$\underline{a}_2 = \left[\begin{array}{cccc|ccc} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} & & & \\ 0 & c_0 & \dots & c_{n-2} & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & c_0 & & & \\ \hline & & & & & & \\ & 0 & & & & 0 & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} q_2(-n) \\ q_2(-n+1) \\ \vdots \\ q_2(-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \quad (3.3/16)$$

$\left. \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} L-n$

$$\underline{a}_1 = \left[\begin{array}{cccc|ccc} b_0 & b_1 & \dots & b_{m-1} & & & \\ 0 & b_0 & \dots & b_{m-2} & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & b_0 & & & \\ \hline & & & & & & \\ & 0 & & & & 0 & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} q_1(-m) \\ q_1(-m+1) \\ \vdots \\ q_1(-1) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \quad (3.3/17)$$

$\left. \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\} L-m$

Die Bestimmung der Vektoren $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ kann wegen der Bauart der Matrizen in (3.3/16) bzw. (3.3/17) über die schnelle Faltung erfolgen. Bei kleinen Werten von n bzw. m wird man $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ direkt berechnen.

Wir fassen $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ in

$$\underline{a} = \underline{a}_1 - \underline{a}_2 \quad (3.3/18)$$

zusammen und lösen die Gleichung (3.3/15) nach $\underline{q}_2$ auf:

$$\underline{q}_2 = \underline{H}_0 \underline{q}_1 + \underline{C}^{-1} \underline{a} \quad (3.3/19)$$

Die Matrix H_0 läßt sich zu einer Matrix zyklischer Bauart erweitern, wie (3.3/10) zeigt. Ähnliches kann man für C^{-1} zeigen, indem man einfach von dem in (3.3/8) eingeschlossenen Sonderfall $B = E$ ausgeht. Daraus folgt, daß (3.3/19) sich durch Anwendung der schnellen Faltung ausrechnen läßt.

Damit ist bewiesen, daß auch rekursive Systeme segmentweise durch endliche Faltungsprodukte realisiert werden können. Die nach wie vor gegebene Rekursivität des Systems trägt der Anteil $C^{-1} a$ in (3.3/19) in der Form einer sogenannten "Block-Rekursion" [24]: Die Ausgangswerte wirken nun nicht mehr unmittelbar auf das System zurück, sondern die letzten n Ausgangswerte eines Segments gehen als Anfangswerte in das darauffolgende Segment ein.

Mehrere Faktoren erhöhen den Aufwand gegenüber der Realisierung nichtrekursiver Systeme durch schnelle Faltung. Zunächst sind nach (3.3/19) zwei Faltungen auszuführen. Dann führt die Erweiterung der Matrizen H_0 und C^{-1} zu Matrizen zyklischer Bauart entsprechend (3.3/10) immer auf eine Verdopplung der Reihenzahl, und schließlich sind die für die Anfangswerte erforderlichen Operationen (3.3/16) und (3.3/17) auszuführen. Wir wollen zunächst untersuchen, auf welche Art diese Anfangswerte zweckmäßigerweise zu berechnen sind. Die direkte Ausmultiplikation von (3.3/16) und (3.3/17) erfordert $n(n+1)/2$ bzw. $m(m+1)/2$ Multiplikationen. Andererseits setzt die Anwendung der schnellen Faltung voraus, daß Matrizen zyklischer Bauart zu bilden sind, deren Reihenzahl eine für die schnelle Fourier-Transformation günstige Zahl, mindestens aber gleich $2n$ bzw. $2m$ sein muß. Wir wollen den bei der schnellen Faltung zu erwartenden Aufwand nach unten hin abschätzen und nehmen deshalb an, daß $2n$ und $2m$ Zweierpotenzen sein sollen. Die Berechnung von a_2 und a_1 über die schnelle Faltung erfordert nach (3.2/34) dann $n \cdot (3 \log_2 2n - 1)$ bzw. $m(3 \log_2 2m - 1)$ Multiplikationen. Hieraus folgt, daß die direkte Ausmultiplikation von (3.3/16) und (3.3/17) für $n \leq 32$ in jedem Fall günstiger ist als die schnelle Faltung. Für diesen Bereich ergibt sich der bei der Berechnung eines Segmentes erforderliche Gesamtaufwand aus Tabelle 3/2.

Tabelle 3/2: Aufwand für die Berechnung eines Segmentes bei der Realisierung rekursiver Systeme durch schnelle Faltung für $L = 2^{p-1}$.

O p e r a t i o n	Anzahl der Multiplikationen
DFT von $\underline{g}_1$ und Multiplikation mit $\underline{D}$ Diagonalmatrix	$L(p+1)$
DFT von $\underline{a}$ und Multiplikation mit $\underline{D}$ Diagonalmatrix	$L(p+1)$
Berechnung von $\underline{a}_2$ nach (3.3/16)	$n(n+1)/2$
Berechnung von $\underline{a}_1$ nach (3.3/17)	$m(m+1)/2$
IDFT zur Bestimmung von $\underline{g}_2$	$L(p-1)$
G e s a m t a u f w a n d	$L(3p+1) + \frac{n}{2}(n+1) + \frac{m}{2}(m+1)$

Da jedes Segment L Ausgangswerte liefert, ist der im Mittel pro Ausgangswert erforderliche Aufwand durch

$$A = 3p+1 + \frac{1}{2L}\{n(n+1) + m(m+1)\} \quad (3.3/20)$$

gegeben. Dabei wurde der einmalige Aufwand zur Bestimmung der Matrizen $\underline{H}_0$ und $\underline{C}_1$, sowie der Eigenwerte ihrer erweiterten Formen nicht berücksichtigt. Wie in Abschnitt 3.2 wollen wir nun die optimale Segmentlänge L_{opt} abschätzen, indem wir zunächst das Minimum von A bezüglich einer stetig veränderbaren Variablen p bestimmen:

$$\frac{dA}{dp} = 3 - \frac{\ln 2}{2^p} \{n(n+1) + m(m+1)\} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.3/21)$$

Wie man leicht zeigen kann, führt die Lösung

$$p_{opt} = \log_2 \left\{ \frac{\ln 2}{3} \{n(n+1) + m(m+1)\} \right\} \quad (3.3/22)$$

auf ein Minimum von A . Tabelle 3/3 gibt p_{opt} für verschiedene Werte von $n = m$ an. Ein Vergleich mit Bild 3/8 zeigt, daß in allen Beispielen die durch Rundung von p_{opt} erhaltene ganze

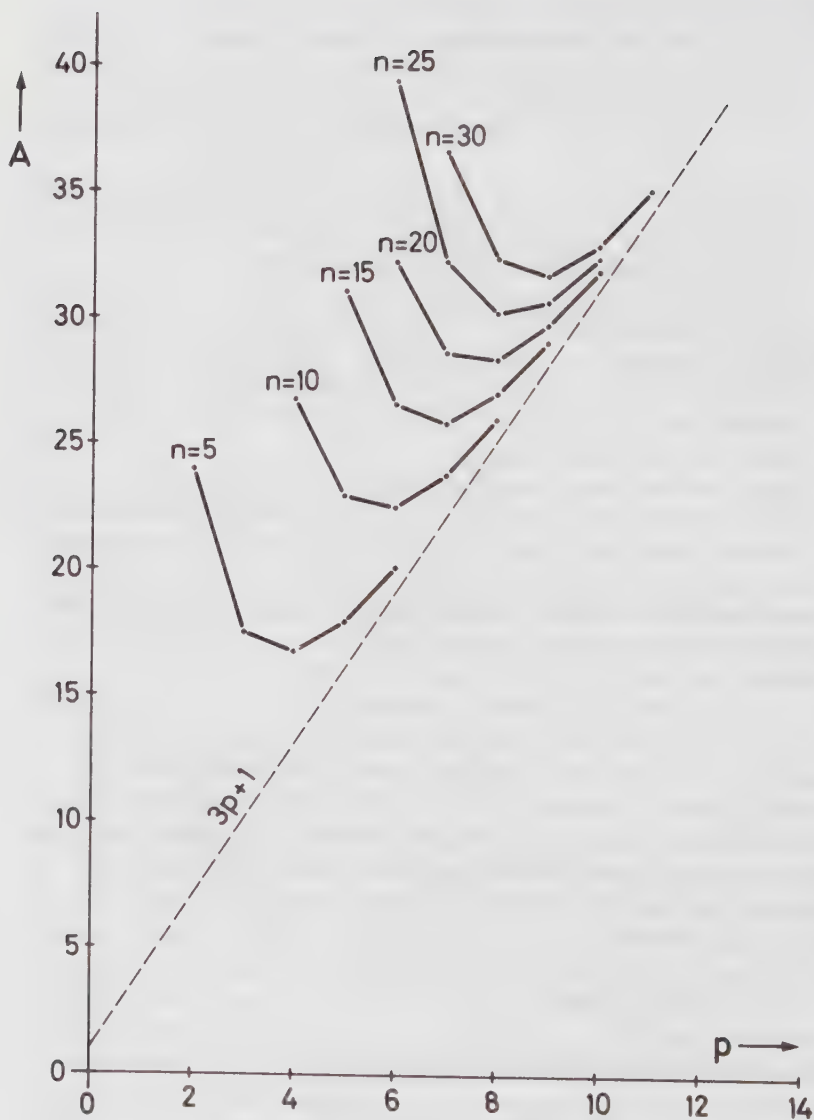


Bild 3/8: Mittlerer Aufwand A für die Berechnung eines Ausgangswertes durch schnelle Faltung bei einem rekursiven System ($n=m$). $2P$ = Segmentlänge.

Zahl auf die jeweils optimale Segmentlänge fñhrt.

Tabelle 3/3: Optimale Segmentlänge, minimaler Aufwand und Reduktionsfaktor q

n = m	P _{opt} nach (3.3/22)	P _{opt} (gerundet)	A _{min}	lim q r → ∞
5	3,8	4	16,75	1,2
10	5,7	6	22,5	0,9
15	6,8	7	25,75	0,71
20	7,6	8	28,3	0,61
25	8,2	8	30,1	0,49
30	8,7	9	31,6	0,46

Wir vergleichen nun die segmentierte Ausführung der schnellen Faltung bezüglich des Aufwandes mit der direkten Lösung der Differenzengleichung. Wir nehmen dazu an, daß r Segmente gebildet werden, die je L Ausgangswerte liefern. Für den Gesamtaufwand bei der schnellen Faltung gilt dann

$$A_{ges} = r L A + A_0, \quad (3.3/23)$$

wobei A₀ dem einmaligen Aufwand entspricht, der bei der Bestimmung der Matrizen H₀ und C⁻¹, sowie der Eigenwerte ihrer erweiterten Formen zu leisten ist. Der Aufwand

$$A_{DG} = r L (m+n+1) \quad (3.3/24)$$

ist andererseits nach (3.3/13) zur direkten Lösung der Differenzengleichung erforderlich. Das Aufwandsverhältnis

$$q := \frac{A_{ges}}{A_{DG}} = \frac{r L A + A_0}{r L (m+n+1)} \quad (3.3/25)$$

konvergiert mit zunehmender Länge der Eingangsfolge gegen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} q = \frac{A}{m+n+1}. \quad (3.3/26)$$

Für einige Werte von n = m ist dieser Grenzwert in Tabelle 3/3 angegeben. Man sieht, daß die schnelle Faltung in dem von der

Anwendung her primär interessierenden Bereich $n \leq 30$ nur sehr mäßigen Gewinn bringt. Insbesondere ist darüberhinaus zu beachten, daß bei der Verarbeitung reeller Zahlenfolgen das Aufwandsverhältnis zwischen schneller Faltung und direkter Lösung der Differenzengleichung sich praktisch verdoppelt, wie im einzelnen bereits im vorhergehenden Abschnitt erläutert wurde.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß auch rekursive Systeme durch schnelle Faltung realisiert werden können. Ähnlich wie bei der entsprechenden Realisierung nichtrekursiver Systeme fällt der dazu erforderliche Aufwand pro Ausgangswert monoton mit zunehmendem Systemgrad ab. Wesentliche Gewinne sind jedoch nur für entsprechend hochgradige Systeme zu erwarten.

4. Bestimmung des Zeitverhaltens linearer zeitinvarianter kontinuierlicher Systeme durch schnelle Faltung.

4.1 Allgemeines Verfahren

Kontinuierliche Systeme lassen sich in den Anwendungsbereich der schnellen Faltung einbeziehen, indem man sie durch entsprechende diskontinuierliche approximiert. Zu den Anwendungsmöglichkeiten, die sich hieraus ergeben, gehört die numerische Bestimmung des Zeitverhaltens von linearen zeitinvarianten kontinuierlichen Systemen mit konzentrierten Elementen. Bezüglich der Theorie dieser Systeme, von der wir im folgenden Gebrauch machen werden, sei auf UNBEHAUEN [27] verwiesen.

Wir beschränken uns auf die Betrachtung eines Systems, das nur einen Eingang und einen Ausgang besitzt. Eingangsfunktion $q_1(t)$ und Ausgangsfunktion $q_2(t)$ seien kausale Zeitfunktionen:

$$q_1(t) \equiv 0, \quad q_2(t) \equiv 0 \quad \text{für } t < 0 \quad (4.1/1)$$

Die Systembeschreibung kann in verschiedenen möglichen Formen gegeben sein: Beispielsweise als lineare Differentialgleichung

$$\sum_{v=0}^n c_v \frac{d^v}{dt^v} q_2(t) = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} \frac{d^{\mu}}{dt^{\mu}} q_1(t), \quad m \leq n \quad (4.1/2)$$

mit den konstanten reellen Koeffizienten c_v und b_{μ} , als Faltungsintegral

$$q_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q_1(t-\tau) h_0(\tau) d\tau, \quad (4.1/3)$$

wenn die Impulsantwort $h_0(t)$ des Systems gegeben ist, oder über die Laplace-Transformation in der Form

$$q_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ H(s) \cdot \mathcal{L} \{ q_1(t) \} \}, \quad (4.1/4)$$

wobei

$$H(s) = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} s^{\mu}}{\sum_{v=0}^n c_v s^v}, \quad m \leq n \quad (4.1/5)$$

die Übertragungsfunktion des Systems und

$$s = \sigma + j \omega \quad (4.1/6)$$

die komplexe Frequenzvariable ist [27].

In jedem Fall ergeben sich Schwierigkeiten bei der Berechnung der Ausgangsfunktion, wenn die auftretenden Integrale nicht geschlossen ausgewertet werden können oder wenn die Eingangsfunktion nur zu diskreten Zeitpunkten bekannt ist. Man ist dann auf numerische Verfahren angewiesen. Das bedeutet, daß das Zeitverhalten des betrachteten kontinuierlichen Systems letztlich nur als Verknüpfung zwischen diskreten Werten der Eingangsfunktion und der Ausgangsfunktion näherungsweise beschrieben wird. Es ist dann sinnvoll und in vielen Fällen zweckmäßig, das kontinuierliche System von vornherein durch ein diskontinuierliches System zu approximieren. Hierzu ist von KUNTZ und SCHÜSSLER ein Verfahren angegeben worden, bei dem man von der Systembeschreibung durch die Laplace-Transformation ausgeht und den Übergang zum diskontinuierlichen System mit Hilfe der bilinearen z-Transformation vollzieht [28]. Ein anderes mögliches Verfahren, bei dem die schnelle Faltung anwendbar ist, wird im folgenden erörtert.

Geht man von der Beschreibungsform (4.1/2) aus, so ist es nahelegend, die Differentialgleichung durch eine Differenzengleichung anzunähern, indem man alle Differentialquotienten durch entsprechende Differenzenquotienten ersetzt. Wir nehmen an, daß uns das Zeitverhalten des Systems im Intervall $(0, \tau)$ interessiert, und unterteilen dieses Intervall in K gleiche Teile der Länge T :

$$T = \frac{\tau}{K} \quad (4.1/7)$$

Wir ersetzen dann die Funktion $q_1(t)$ durch ihre Stützwerte

$$x_k := q_1(kT) \quad (4.1/8)$$

in den Teilpunkten

$$t_k = kT, \quad k = 0, 1, \dots, K. \quad (4.1/9)$$

Die diskreten Lösungswerte der aufzustellenden Differenzen-

gleichung nennen wir y_k und ordnen sie näherungsweise der Ausgangsfunktion in den Teilpunkten t_k zu:

$$y_k \longrightarrow q_2(kT) \quad (4.1/10)$$

Die Umwandlung von (4.1/2) in eine entsprechende Differenzengleichung kann nun nach dem bekannten Differenzenverfahren erfolgen (z.B. [29]). Danach werden beispielsweise die ersten vier Differentialquotienten von $q_2(t)$ folgendermaßen durch entsprechende Differenzenquotienten ersetzt:

$$\left\{ \frac{dq_2}{dt} \right\}_{t=t_k} \longrightarrow \frac{1}{2T} (y_{k+1} - y_{k-1}) \quad (4.1/11)$$

$$\left\{ \frac{d^2 q_2}{dt^2} \right\}_{t=t_k} \longrightarrow \frac{1}{T^2} (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) \quad (4.1/12)$$

$$\left\{ \frac{d^3 q_2}{dt^3} \right\}_{t=t_k} \longrightarrow \frac{1}{2T^3} (y_{k+2} - 3y_{k+1} + 3y_{k-1} - y_{k-2}) \quad (4.1/13)$$

$$\left\{ \frac{d^4 q_2}{dt^4} \right\}_{t=t_k} \longrightarrow \frac{1}{T^4} (y_{k+2} - 4y_{k+1} + 6y_k - 4y_{k-1} + y_{k-2}) \quad (4.1/14)$$

Zur Angabe einer allgemeinen Ersetzungsvorschrift wird der Operator Δ durch die Vorschrift

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k \quad (4.1/15)$$

eingeführt und seine wiederholte Anwendung durch

$$\Delta^l y_k = \Delta(\Delta^{l-1} y_k) = \Delta^{l-1} y_{k+1} - \Delta^{l-1} y_k \quad (4.1/16)$$

$$l = 1, 2, \dots$$

$$\Delta^0 y_k = y_k \quad (4.1/17)$$

erklärt. Die allgemeine Ersetzungsvorschrift beim Differenzenverfahren lautet dann [29]:

$$\left\{ \frac{d^l q_2}{dt^l} \right\}_{t=t_k} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2T^l} \left(\Delta^l y_{k-\frac{l+1}{2}} + \Delta^l y_{k-\frac{l-1}{2}} \right) & \text{für } l \text{ ungerade} \\ \frac{1}{T^l} \Delta^l y_{k-\frac{l}{2}} & \text{für } l \text{ gerade} \end{cases} \quad (4.1/18)$$

Ersetzen wir nun die Differentialquotienten von $q_2(t)$ und $q_1(t)$ in (4.1/2) durch die entsprechenden Differenzenquotienten, so ergibt sich eine Differenzengleichung, die wir durch Zusammenfassung aller Stützwerte y_k bzw. x_k mit jeweils gleichen Indizes in eine zu (3.1/2) äquivalente Form bringen können.

Der Übergang vom kontinuierlichen zum diskontinuierlichen System ist dann im Prinzip vollzogen, und wir können die für rekursive diskontinuierliche Systeme entwickelten Methoden zur schnellen Faltung, die im Abschnitt 3.3 behandelt wurden, sinngemäß anwenden. Insbesondere ist die Berücksichtigung von Anfangsbedingungen und damit auch eine segmentweise Berechnung der Ausgangsfunktionen möglich.

Als einfaches Beispiel betrachten wir ein System mit der Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (4.1/19)$$

und der Impulsantwort

$$h_0(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin(\sqrt{3} t/2) . \quad (4.1/20)$$

Zur numerischen Bestimmung des Zeitverhaltens haben wir entsprechend dem beschriebenen Verfahren die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 q_2(t)}{dt^2} + \frac{dq_2(t)}{dt} + q_2(t) = g_1(t) \quad (4.1/21)$$

durch eine Differenzengleichung anzunähern:

$$\frac{1}{T^2} (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) + \frac{1}{2T} (y_{k+1} - y_{k-1}) + y_k = x_k \quad (4.1/22)$$

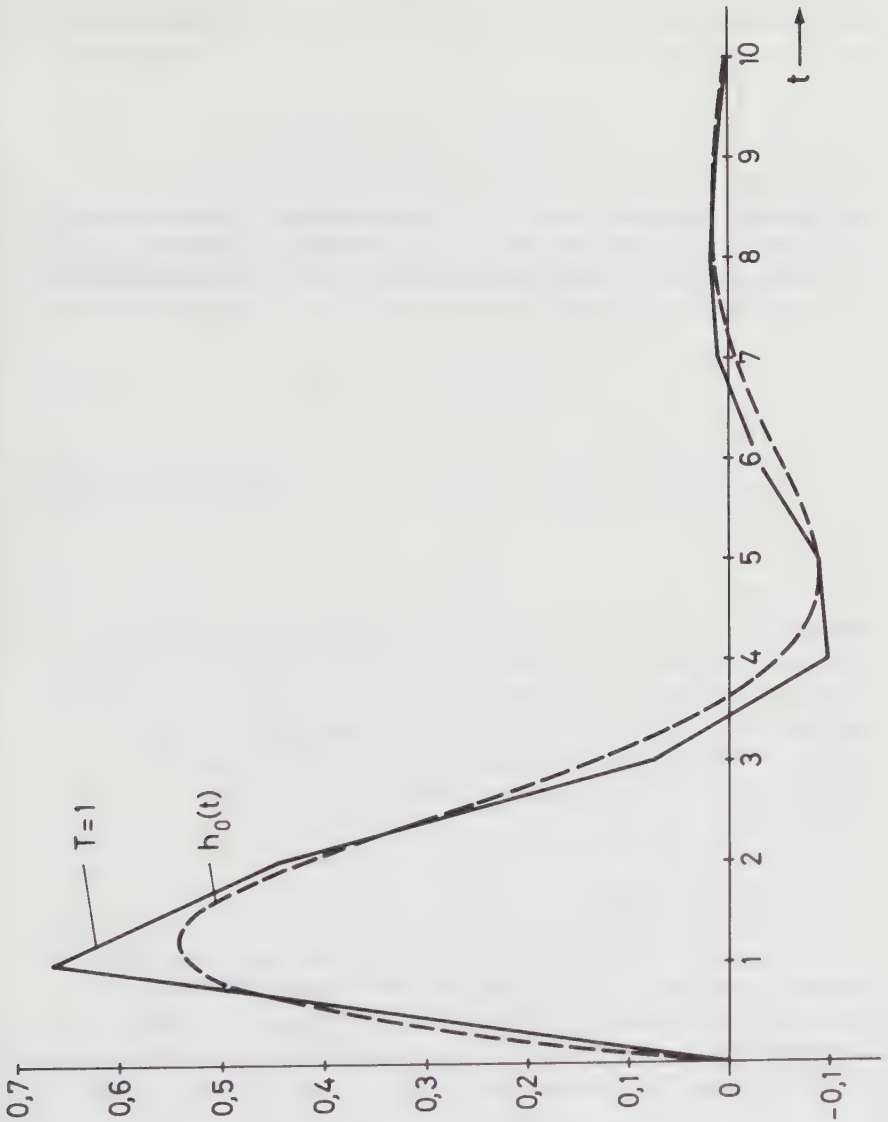


Bild 4/1: Impulsantwort $h_0(t)$ eines kontinuierlichen Systems vom Grad 2 und die diskrete Approximation.

Die Zusammenfassung der Stützwerte mit jeweils gleichen Indizes führt auf die Form

$$\left(\frac{1}{T^2} + \frac{1}{2T}\right) y_{k+1} + \left(1 - \frac{2}{T^2}\right) y_k + \left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{2T}\right) y_{k-1} = x_k, \quad (4.1/23)$$

die wir nun zu einer angenäherten Bestimmung der Impulsantwort des Systems verwenden wollen. Die Eingangswerte x_k verschwinden dann bis auf $x_0 = 1/T$. Eine sehr grobe Approximation erhalten wir mit dem relativ großen Stützabstand $T = 1$. Die Differenzengleichung lautet in diesem Fall

$$\frac{3}{2} y_{k+1} - y_k + \frac{1}{2} y_{k-1} = \delta_{0k} \quad (4.1/24)$$

$$k = 0, 1, \dots,$$

wobei die Anfangswerte durch

$$y_0 = y_{-1} = 0 \quad (4.1/25)$$

gegeben sind. Die Lösung der Differenzengleichung, die direkt bzw. durch Anwendung der diskreten Fourier-Transformation gewonnen werden kann, zeigt Bild 4/1. Zum Vergleich ist die exakte Impulsantwort nach (4.1/20) dargestellt. Approximationen mit kleineren Stützabständen T werden für dieses Beispiel noch im folgenden Abschnitt angegeben (Bild 4/2).

4.2 Periodische Lösungen

Im folgenden wird eine spezielle Variante des oben beschriebenen Verfahrens entwickelt, die primär von der Betrachtungsweise her interessant ist. Ausgangspunkt ist die Abbildung der Differenzenquotienten durch die diskrete Fourier-Transformation, die in Analogie zum Differentiationssatz der Fourier-Transformation steht.

Wir betrachten nunmehr eine periodische Stützfunktion, die aus den Stützwerten

$$y_k = y_{k+N}, \quad k \text{ ganzzahlig} \quad (4.2/1)$$

bestehen soll, und fassen die N Werte einer Periode zu dem Spaltenvektor

$$\underline{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})' \quad (4.2/2)$$

zusammen. Die Bildung der Differenzenquotienten der Stützfunktion können wir nun als Multiplikation des Vektors $\underline{y}$ mit entsprechenden Differenzen-Matrizen darstellen. Die ersten drei Differenzenquotienten (4.1/11) bis (4.1/13) beispielsweise werden dann bei einem Stützabstand T durch Produkte der Form

$$\frac{1}{T} \underline{\Delta}^{(1)} \underline{y}, \frac{1}{T^2} \underline{\Delta}^{(2)} \underline{y}, \frac{1}{T^3} \underline{\Delta}^{(3)} \underline{y} \quad (4.2/3)$$

gebildet, wobei die N-reihigen Differenzen-Matrizen folgendermaßen definiert sind:

$$\underline{\Delta}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2/4)$$

$$\underline{\Delta}^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (4.2/5)$$

$$\underline{\Delta}^{(3)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2/6)$$

Für die höheren Differenzen-Matrizen folgt aus (4.1/18) die Bildungsvorschrift:

$$\underline{\Delta}^{(l)} = \begin{cases} \left[\underline{\Delta}^{(2)} \right]^{\frac{l}{2}} & \text{für } l \text{ gerade} \\ \underline{\Delta}^{(1)} \left[\underline{\Delta}^{(2)} \right]^{\frac{l-1}{2}} & \text{für } l \text{ ungerade} \end{cases} \quad (4.2/7)$$

Alle Differenzen-Matrizen besitzen eine zyklische Bauart. Sie lassen sich daher durch eine Ähnlichkeitstransformation mit der Matrix $\underline{W}$ der diskreten Fourier-Transformation diagonalisieren, wie für die Matrix $\underline{\Delta}^{(2)}$ bereits aus (1.2/62) folgt:

$$\underline{W} \underline{\Delta}^{(2)} \underline{W}^{-1} = \underline{D}^{(2)} = \text{Diag} (d_k^{(2)}) \quad (4.2/8)$$

$$d_k^{(2)} = 2(\cos k2\pi/N - 1) = -4\sin^2 k\pi/N$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.2/9)$$

Entsprechendes ergibt sich für $\underline{\Delta}^{(1)}$ nach (1.2/57) und (1.2/58):

$$\underline{W} \underline{\Delta}^{(1)} \underline{W}^{-1} = \underline{D}^{(1)} = \text{Diag} (d_k^{(1)}) \quad (4.2/10)$$

$$d_k^{(1)} = j \sin k2\pi/N \quad (4.2/11)$$

Allgemein gilt:

$$\underline{W} \underline{\Delta}^{(l)} \underline{W}^{-1} = \underline{D}^{(l)} = \begin{cases} \left[\underline{D}^{(2)} \right]^{\frac{l}{2}} & \text{für } l \text{ gerade} \\ \underline{D}^{(1)} \left[\underline{D}^{(2)} \right]^{\frac{l-1}{2}} & \text{für } l \text{ ungerade} \end{cases} \quad (4.2/11)$$

Die Ausmultiplikation der Diagonalmatrizen liefert

$$\left[\underline{D}^{(2)} \right]^{\frac{l}{2}} = \text{Diag} \left\{ (-4 \sin^2 k\pi/N)^{\frac{l}{2}} \right\} = (2j)^l \text{Diag} \{ \sin^l k\pi/N \} \quad \text{für } l \text{ gerade,} \quad (4.2/12)$$

$$\underline{D}^{(1)} \left[\underline{D}^{(2)} \right]^{\frac{l-1}{2}} = \text{Diag} \left\{ j \sin(k2\pi/N) (-4 \sin^2 k\pi/N)^{\frac{l-1}{2}} \right\} = (2j)^l \text{Diag} \{ \sin^l(k\pi/N) \cos(k\pi/N) \} \quad (4.2/13)$$

für l ungerade.

Hieraus ergibt sich bei Anwendung der diskreten Fourier-Transformation auf die Differenzen-Matrizen die Beziehung

$$\frac{1}{T^l} \underline{W} \underline{\Delta}^{(l)} = \frac{1}{T^l} \underline{D}^{(l)} \underline{W} = \begin{cases} \left(\frac{2j}{T}\right)^l \text{Diag}\{\sin^l k\pi/N\} \underline{W} \\ \text{für } l \text{ gerade} \\ \left(\frac{2j}{T}\right)^l \text{Diag}\{\sin^l(k\pi/N) \cos k\pi/N\} \underline{W} \\ \text{für } l \text{ ungerade} \end{cases} \quad (4.2/14)$$

als Analogon zum Differentiationssatz der Fourier-Transformation:

$$\mathcal{F} \frac{d^l}{dt^l} = (j\omega)^l \mathcal{F} \quad (4.2/15)$$

Für $k \ll N$ sind die Eigenwerte von $\frac{1}{T} \underline{\Delta}^{(1)}$ in erster Näherung äquidistant auf der imaginären Achse der komplexen Zahlenebene verteilt:

$$\lim_{\frac{k}{N} \rightarrow 0} \frac{\underline{W} \underline{\Delta} \underline{W}^{-1}}{T} = \lim_{\frac{k}{N} \rightarrow 0} \text{Diag}\left\{ \frac{j k 2\pi}{NT} \right\} \quad (4.2/16)$$

Allgemein gilt

$$\lim_{\frac{k}{N} \rightarrow 0} \frac{\underline{W} \underline{\Delta}^{(l)}}{T^l} = \lim_{\frac{k}{N} \rightarrow 0} \text{Diag}\left\{ \left(\frac{j k 2\pi}{NT} \right)^l \right\} \underline{W}, \quad (4.2/17)$$

woraus für den formalen Übergang zum kontinuierlichen Bereich

$$\frac{k 2\pi}{NT} \rightarrow \omega, \quad \underline{W} \rightarrow \mathcal{F} \quad (4.2/18)$$

der Differentiationssatz (4.2/15) folgt.

Wir wenden die gefundenen Beziehungen nun auf die numerische Lösung der Differentialgleichung (4.1/2) an. Dazu ersetzen wir die Differentialquotienten im wesentlichen durch die Differenzen-Matrizen, die Funktion $q_2(t)$ durch die Werte y_k nach (4.2/1) und $q_1(t)$ durch eine periodische Stützfunktion mit den Stützwerten

$$x_k = x_{k+N}, \quad (4.2/19)$$

die wir im Spaltenvektor

$$\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})' \quad (4.2/20)$$

zusammenfassen. Wir erhalten dann das Gleichungssystem

$$\sum_{v=0}^n c_v \frac{1}{T^v} \underline{A}^{(v)} \underline{y} = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} \frac{1}{T^{\mu}} \underline{A}^{(\mu)} \underline{x} \quad (4.2/21)$$

und wenden hierauf die diskrete Fourier-Transformation an. Mit (4.2/14) folgt

$$\sum_{v=0}^n c_v \frac{1}{T^v} \underline{D}^{(v)} \underline{W} \underline{y} = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} \frac{1}{T^{\mu}} \underline{D}^{(\mu)} \underline{W} \underline{x} . \quad (4.2/22)$$

Wir fassen die Summen der Diagonalmatrizen zusammen

$$\underline{C} := \sum_{v=0}^n c_v \frac{1}{T^v} \underline{D}^{(v)} \quad (4.2/23)$$

$$\underline{B} := \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} \frac{1}{T^{\mu}} \underline{D}^{(\mu)} \quad (4.2/24)$$

und lösen (4.2/22) nach $\underline{y}$ auf

$$\underline{y} = \underline{W}^{-1} \underline{C}^{-1} \underline{B} \underline{W} \underline{x} = \underline{W}^{-1} \underline{H} \underline{W} \underline{x} , \quad (4.2/25)$$

wobei die Diagonalmatrix $\underline{H}$ durch

$$\underline{H} := \underline{C}^{-1} \underline{B} = \text{Diag} \{H_k\} \quad (4.2/26)$$

mit den Elementen

$$H_k = \frac{\sum_{\mu=0}^{\frac{m}{2}} b_{2\mu} \left\{ \frac{2j}{T} \sin k\pi/N \right\}^{2\mu} + \sum_{\mu=0}^{\frac{m}{2}-1} b_{2\mu+1} \left\{ \frac{2j}{T} \sin k\pi/N \right\}^{2\mu+1} \cos k\pi/N}{\sum_{v=0}^{\frac{n}{2}} c_{2v} \left\{ \frac{2j}{T} \sin k\pi/N \right\}^{2v} + \sum_{v=0}^{\frac{n}{2}-1} c_{2v+1} \left\{ \frac{2j}{T} \sin k\pi/N \right\}^{2v+1} \cos k\pi/N} \quad (4.2/27)$$

definiert ist. Beim Übergang zum kontinuierlichen Bereich ($N \rightarrow \infty$, $T \rightarrow 0$, $\frac{k2\pi}{NT} \rightarrow \omega$) geht H_k in den entsprechenden Wert $H(j\omega)$ der Übertragungsfunktion des kontinuierlichen Systems über.

Die Berechnung des Vektors $\underline{y}$ der Ausgangsfunktion kann entsprechend (4.2/25) unter Anwendung der schnellen Fourier-Transformation erfolgen. Wir betrachten wieder das im vorigen Abschnitt behandelte Beispiel, wo die Impulsantwort (4.1/20) eines kontinuierlichen Systems mit der Übertragungsfunktion (4.1/19) zu berechnen ist. Wir müssen hier allerdings von einer periodischen Erregung

$$x_k = \frac{1}{T} \delta_{0k} \pmod{N}, \quad k \text{ ganzzahlig} \quad (4.2/28)$$

ausgehen. Die Ausgangswerte y_k approximieren die Impulsantwort $h_0(t_k)$ des kontinuierlichen Systems dann, wenn $h_0(NT)$ hinreichend stark abgeklungen ist. Das sei etwa für

$$NT = 10 \quad (4.2/29)$$

der Fall (Bild 4/1).

Die Elemente der Matrix $\underline{H}$ sind nun speziell durch

$$\begin{aligned} H_k &= \frac{1}{-\left(\frac{2}{T}\right)^2 \sin^2 k\pi/N + j\frac{2}{T} \sin(k\pi/N) \cos k\pi/N + 1} = \\ &= \frac{T}{\frac{2}{T}(\cos k2\pi/N - 1) + j \sin k2\pi/N + T} \end{aligned} \quad (4.2/30)$$

gegeben. Die diskrete Fourier-Transformation des Spaltenvektors

$$\underline{x} = (1/T, 0, 0, \dots, 0)' \quad (4.2/31)$$

führt auf

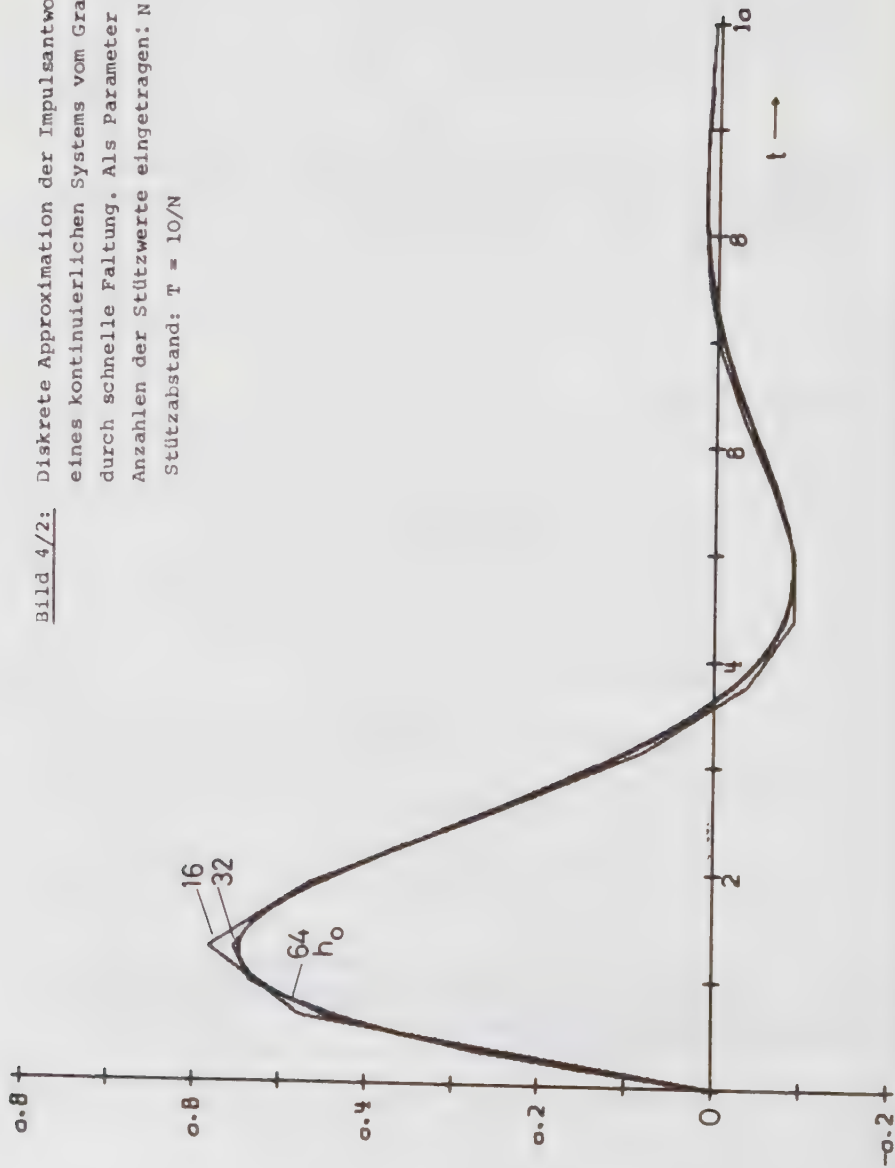
$$\underline{W} \underline{x} = \frac{1}{T\sqrt{N}} (1, 1, \dots, 1)' \quad (4.2/32)$$

Nach (4.2/25) ergibt sich dann der Ausgangsvektor $\underline{y}$ im wesentlichen als inverse diskrete Fourier-Transformierte eines Spaltenvektors mit den Elementen H_k :

$$\underline{y} = \underline{W}^{-1} \underline{H} \underline{W} \underline{x} = \frac{1}{T\sqrt{N}} \underline{W}^{-1} (H_0, H_1, \dots, H_{N-1})' \quad (4.2/33)$$

Bild 4/2:

Diskrete Approximation der Impulsantwort $h_0(t)$ eines kontinuierlichen Systems vom Grad 2 durch schnelle Faltung. Als Parameter sind die Anzahlen der Stützpunkte eingetragen: $N = 16, 32, 64$
Stützabstand: $T = 10/N$



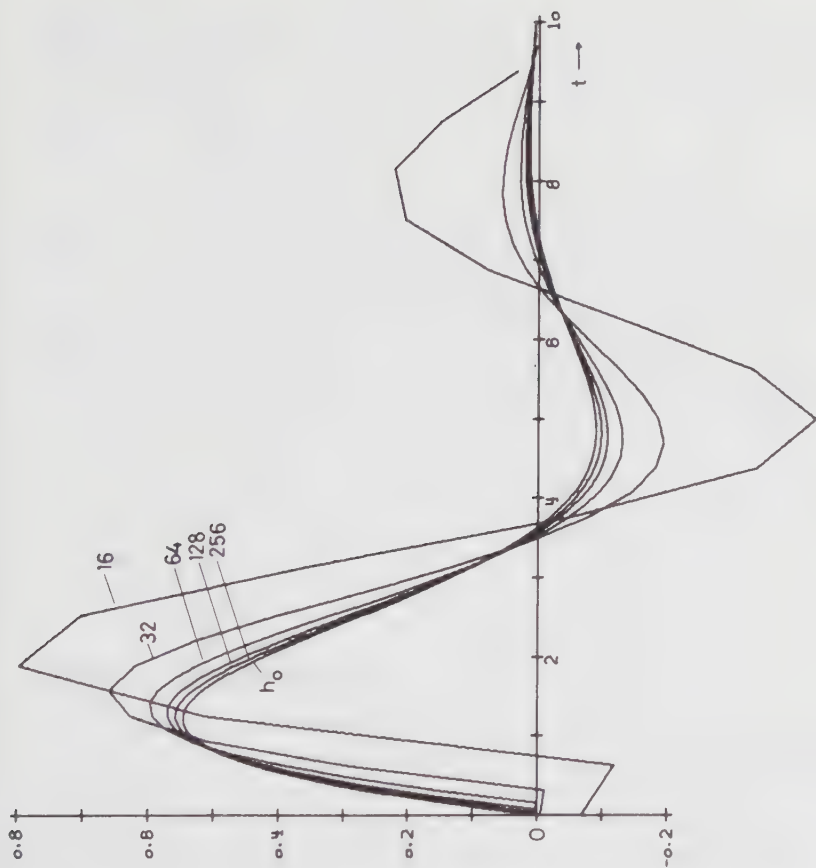


Bild 4/3: Diskrete Approximation des gleichen Systems wie in Bild 4/2 nach M. KLEIN [17].
 $N = 16, 32, 64, 128, 256$ Stützabstand: $T = 10/N$

Für $T = 10/N$ und $N = 16, 32, 64$ sind die Ergebnisse dieser Operation in Bild 4/2 dargestellt. Schon bei der relativ kleinen Stützwertanzahl $N = 16$ wird die Impulsantwort $h_0(t)$ verhältnismäßig gut approximiert. Für $N = 64$ liegen die Abweichungen innerhalb der Zeichengenauigkeit.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß das angegebene Verfahren die numerische Berechnung des Zeitverhaltens von kontinuierlichen Systemen im eingeschwungenen Zustand ermöglicht. Systemantworten auf einmalige Zeitvorgänge können dann berechnet werden, wenn $g_2(t)$ wie bei dem behandelten Beispiel praktisch nur in einem endlichen Zeitintervall, das kleiner als das Periodizitätsintervall NT sein muß, von Null verschieden ist. Mit hinreichender Annäherung muß dabei

$$y_{N-1} = y_{N-2} = \dots = y_{N-n+1} = 0 \quad (4.2/34)$$

gelten.

4.3 Verfahren nach W. KLEIN

Das im Abschnitt 4.2 beschriebene Verfahren geht in seiner Grundidee, die Differenzenquotienten als Matrizen darzustellen und diese mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation zu diagonalisieren, auf eine Arbeit von W. KLEIN zurück [17]. Der Unterschied zwischen beiden Methoden besteht hauptsächlich in der Wahl der Differenzenquotienten und in den Konsequenzen, die sich daraus ergeben.

KLEIN ersetzt alle Differentialquotienten durch die entsprechenden oberen Differenzenquotienten

$$\left\{ \frac{d^l q_2}{dt^l} \right\}_{t=t_k} \longrightarrow \frac{1}{T^l} \Delta^l y_k, \quad (4.3/1)$$

wobei der Operator Δ durch (4.1/15) bis (4.1/17) definiert ist. Für $l = 1, 2, 3$ gilt beispielsweise:

$$\Delta y_k = y_{k+1} - y_k \quad (4.3/2)$$

$$\Delta^2 y_k = y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k \quad (4.3/3)$$

$$\Delta^3 y_k = y_{k+3} - 3y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k \quad (4.3/4)$$

Die Bildung des ersten Differenzenquotienten der periodischen Stützfunktion mit den Werten y_k läßt sich als vektorielle Operation $\frac{1}{T} \underline{\Delta} \underline{y}$ darstellen, wenn die Differenzenmatrix $\underline{\Delta}$ durch

$$\underline{\Delta} := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.3/5)$$

definiert ist. Die allgemeine Vorschrift (4.3/1) zur Bildung des Differenzenquotienten entspricht dann der vektoriellen Operation $\frac{1}{T} \underline{\Delta}^l \underline{y}$, d.h. im wesentlichen der Multiplikation mit der l -ten Potenz der Differenzenmatrix $\underline{\Delta}$. Bezüglich der Diagonalisierung der höheren Differenzenmatrizen ergeben sich nun gegenüber (4.2/11) wesentliche Vereinfachungen. Nach (1.2/57) und (1.2/58) gilt

$$\underline{W} \underline{\Delta} \underline{W}^{-1} = \underline{D} = \text{Diag} (d_k) \quad (4.3/6)$$

mit

$$d_k = e^{jk2\pi/N} - 1. \quad (4.3/7)$$

Hieraus folgt allgemein

$$\underline{W} \underline{\Delta}^l \underline{W}^{-1} = \underline{D}^l = \text{Diag} (d_k^l), \quad (4.3/8)$$

und anstelle von (4.2/14) ergibt sich hier die Beziehung

$$\frac{1}{T^l} \underline{W} \underline{\Delta}^l = \frac{1}{T^l} \underline{D}^l \underline{W} = \text{Diag} \left\{ \left(\frac{d_k}{T} \right)^l \right\} \underline{W} \quad (4.3/9)$$

als Analogon zum Differentiationssatz der Fourier-Transformation.

Die Eigenwerte von $\frac{1}{T} \underline{\Delta}$ liegen in der komplexen Zahlenebene gleichmäßig verteilt auf einem Kreis mit dem Radius $1/T$, dessen Mittelpunkt auf der negativen reellen Achse bei $-1/T$ liegt. Beim Übergang zum kontinuierlichen Bereich geht dieser Kreis in die imaginäre Achse über [17].

Anstelle von (4.2/21) ergibt sich bei dem Verfahren von KLEIN die Gleichung

$$\sum_{v=0}^n c_v \frac{1}{T^v} \underline{\Delta}^v \underline{y} = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} \frac{1}{T^{\mu}} \underline{\Delta}^{\mu} \underline{x}, \quad (4.3/10)$$

die bei Multiplikation mit $\underline{W}$ von links her übergeht in

$$\sum_{v=0}^n c_v \frac{1}{T^v} \underline{D}^v \underline{W} \underline{y} = \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} \frac{1}{T^{\mu}} \underline{D}^{\mu} \underline{W} \underline{x}. \quad (4.3/11)$$

Die Auflösung nach $\underline{y}$ ergibt

$$\begin{aligned} \underline{y} &= \underline{W}^{-1} \left\{ \sum_{v=0}^n c_v \frac{1}{T^v} \underline{D}^v \right\}^{-1} \sum_{\mu=0}^m b_{\mu} \frac{1}{T^{\mu}} \underline{D}^{\mu} \underline{W} \underline{x} = \\ &= \underline{W}^{-1} \text{Diag} \{H_k\} \underline{W} \underline{x}, \end{aligned} \quad (4.3/12)$$

wobei die Diagonalelemente H_k hier durch

$$H_k = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} \frac{1}{T^{\mu}} \left(e^{jk2\pi/N} - 1 \right)^{\mu}}{\sum_{v=0}^n c_v \frac{1}{T^v} \left(e^{jk2\pi/N} - 1 \right)^v} \quad (4.3/13)$$

gegeben sind.

Wir wenden nun dieses Verfahren auf das oben betrachtete Beispiel an. Dazu wird nach (4.2/32) im wesentlichen die inverse diskrete Fourier-Transformierte der Elemente

$$H_k = \frac{1}{(e^{jk2\pi/N} - 1)^2/T^2 + (e^{jk2\pi/N} - 1)/T + 1} \quad (4.3/14)$$

gebildet. Die für $T = 10/N$ und $N = 16, 32, 64, 128, 256$ berechneten Ergebnisse sind in Bild 4/3 dargestellt. Man erkennt, daß die Unsymmetrie der Differenzenquotienten Δy_k und $\Delta^2 y_k$ schon bei dem betrachteten System zweiten Grades eine verhältnismäßig schlechte Konvergenz zur Folge hat. Bei höhergradigen Systemen wird sich diese Unsymmetrie der Differenzenquotienten noch stärker auswirken.

- 102 -
L i t e r a t u r
=====

- [1] J.W. COOLEY, P.A.W. LEWIS, P.D. WELCH
The finite Fourier transform
IEEE Trans.Aud.Electroacoustics, AU-17(1969), 77 - 85

- [2] B. GOLD, C.M. RADER
Digital processing of signals
McGraw-Hill 1969

- [3] T.G. STOCKHAM jr.
High-speed convolution and correlation with applications to
digital filtering
In [2], S. 203 - 232

- [4] L. COLLATZ
Funktionalanalysis und numerische Mathematik
Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1964

- [5] F.R. GANTMACHER
Matrizenrechnung, 2. Auflage
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966

- [6] R. ZURMÜHL
Matrizen und ihre technischen Anwendungen
Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1964, 4. Auflage

- [7] G. DOETSCH
Funktionaltransformationen
in: R. Sauer, I. Szabó, Mathematische Hilfsmittel des Inge-
nieurs, Teil I
Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967

- [8] R. ZURMÜHL
Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1965, 5. Auflage

- [9] W.I. SMIRNOW
Lehrgang der höheren Mathematik, Teil II
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966, 7. Auflage

- [10] F.L. BAUER, H.J. STETTER
Zur numerischen Fourier-Transformation
Num. Math. 1 (1959), 208-220
- [11] J.W. COOLEY, P.A.W. LEWIS, P.D. WELCH
Application of the fast Fourier transform to computation of
Fourier integrals, Fourier series, and convolution integrals
IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics AU-15 (1967), 79-84
- [12] T.G. STOCKHAM jr.
High-speed convolution and correlation
Spring Joint Computer Conference 1966, AFIPS Proc. 28
(1966), 229 - 233
- [13] J.W. COOLEY, P.A.W. LEWIS, P.D. WELCH
The fast Fourier transform and its applications
IEEE Trans. Education 12 (1969), 27 - 34
- [14] W.M. GENTLEMAN, G. SANDE
Fast Fourier transforms - for fun and profit
Fall Joint Computer Conference, 1966, AFIPS Proc. 29
(1966), 563 - 578
- [15] G.D. BERGLAND
A guided tour of the fast Fourier transform
IEEE Spectrum 6 (July 1969), 41 - 52
- [16] H.D. HELMS
Fast Fourier transform method of computing difference
equations and simulating filters
IEEE Trans. Aud. Electroacoustics, AU-17 (1969), 77 - 85
- [17] W. KLEIN
Die quantisierte Fourier-Transformation
AEU 23 (1969), 295 - 300
- [18] N. WIENER
The Fourier integral and certain of its applications
Dover Publications, New York

- [19] W. SCHÜSSLER in:
Untersuchungen über Eigenschaften, Entwurf und Realisierung
digitaler Filter
Ausgewählte Arbeiten über Nachrichtensysteme, Erlangen 1969
- [20] O. HERRMANN
Zum Entwurf nichtrekursiver digitaler Filter bei vorgege-
benen Eigenschaften im Frequenzbereich
Habilitationsschrift, Erlangen 1971
- [21] B. GOLD, K.L. JORDAN
A note on digital filter synthesis
Proc. IEEE 56 (1968), 1717 - 1718
- [22] R. UNBEHAUEN
Zur Synthese digitaler Filter
AEÜ 24 (1970), 305 - 313
- [23] D. CHANOUX
Synthesis of recursive digital filters using the FFT
IEEE Trans. Aud. Electroacoustics, AU-18 (1970), 211 - 212
- [24] H.B. VOELCKER, E.E. HARTQUIST
Digital filtering via block recursion
IEEE Trans. Aud. Electroacoustics, AU-18 (1970), 169 - 176
- [25] T.H. CRYSTAL, L. EHRLMANN
The design and applications of digital filters with
complex coefficients
IEEE Trans. Aud. Electroacoustics, AU-16 (1968), 315 - 320
- [26] R.B. BLACKMAN, J.W. TUKEY
The measurement of power spectra from the point of view
of communications engineering
Bell Syst. Techn. J. 37 (1958), 185 - 282, 485 - 569
- [27] R. UNBEHAUEN
Systemtheorie
R. Oldenbourg Verlag München-Wien 1969

- [28] W. KUNTZ, W. SCHÜSSLER
Zur numerischen Berechnung der Ausgangsfunktion von Netzwerken mit Hilfe der z-Transformation
NTZ 19 (1966), 169 - 172
- [29] L. COLLATZ
Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, 2. Auflage
Akad. Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1963
- [30] R. COURANT, D. HILBERT
Methoden der mathematischen Physik
Bd. I, 3. Auflage
Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1968
- [31] D. ACHILLES
Der Überlagerungssatz der diskreten Fourier-Transformation und seine Anwendung auf die schnelle Fourier-Transformation
AEU 25 (1971), 251 - 254
- [32] F.A. WILLERS
Methoden der praktischen Analysis
3. Auflage, Berlin 1957
- [33] C. RUNGE
Über die Zerlegung empirisch gegebener periodischer Funktionen in Sinuswellen
Zeitschr. f. Mathematik u. Physik 48 (1903), 443 - 456
- [34] J.W. COOLEY, P.A.W. LEWIS, P.D. WELCH
Historical notes on the Fast Fourier Transform
IEEE Trans. Aud. Electroacoustics, AU-15 (1967), 76 - 79
- [35] C. RUNGE, H. KÖNIG
Vorlesungen über Numerisches Rechnen, Bd. II
Springer-Verlag, Berlin 1924
- [36] G.C. DANIELSON, C. LANCZOS
Some improvements in practical Fourier analysis and their application to X-ray scattering from liquids.
J. Franklin Inst. 233 (1942), 365 - 380, 435 - 452

- [37] L.W. POLLAK
Zur harmonischen Analyse empirischer, durch eine große
Zahl gegebener Ordinaten definierter Funktionen
Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie (1926)
311 - 315, 344 - 349, 378 - 384
- [38] I.J. GOOD
The interaction algorithm and practical Fourier analysis
J. Roy, Stat. Soc, ser. B, 20 (1958), 361 - 372
- [39] J.W. COOLEY, J.W. TUKEY
An algorithm for the machine calculation of complex
Fourier series.
Math. Computation 19 (1965), 279 - 301
- [40] G.D. BERGLAND
A guided tour of the fast Fourier transform
IEEE Spectrum, July 1969, 41 - 52
- [41] R.C. SINGLETON
A short bibliography on the fast Fourier transform
IEEE Trans. Aud. Electroacoustics, AU-17 (1969), 166 - 169
- [42] G. GÜNTHER
Neuere Fortschritte bei der Fourier-Transformation
Elektron. Datenverarbeitung 6 (1969), 275 - 280
- [43] R.C. SINGLETON
An algorithm for computing the mixed radix fast Fourier
transform
IEEE Trans. Aud. Electroacoustics, AU-17 (1969), 93 - 103
- [44] R.C. SINGLETON
On computing the fast Fourier Transform
Comm. ACM 10 (1967), 647 - 654
- [45] G.D. BERGLAND
The fast Fourier transform recursive equations for
arbitrary length records
Math. Comp. 21 (1967), 236 - 238

- [46] G.D. BERGLAND
A fast Fourier transform algorithm for real-valued series
Comm. ACM 11 (1968), 703 - 710
- [47] N.M. BRENNER
Three FORTRAN programmes that perform the Cooley-Tukey
Fourier transform
M.I.T. Lincoln Lab., Lexington, Mass., USA
Tech. Note 1967-2, July 1967
- [48] L.I. BLUESTEIN
A linear filtering approach to the computation of the
discrete Fourier transform
NEREM-Record 1968, 218 - 219
- [49] A. PAPOULIS
Real time scaling
Proc. 5th Ann. Allerton Conf. on Circuit and System Theory
Oktober 1967, 87 - 96
- [50] M.C. PEASE
Semi-fast transforms
IEEE Arden House Workshop on Digital Filtering
New York, Januar 1970
- [51] L.R. RABINER, R.W. SCHAFER, C.M. RADER
The chirp z-Transform algorithm
IEEE Trans. Aud. Electroacoustics, AU-17 (1969), 86 - 92
- [52] G.D. BERGLAND
Fast Fourier transform hardware implementations - an
overview
IEEE Trans. Aud. Electroacoustics, AU- 17 (1969), 104 - 108
- [53] G.D. BERGLAND
Fast Fourier transform hardware implementations - a survey
IEEE Trans. Aud. Electroacoustics, AU-17 (1969), 109 - 119
- [54] A.G. LARSON, R.C. SINGLETON
Real-time spectral analysis on a small general-purpose
computer
Fall Joint Computer Conf. 1967, 665 - 674

Verzeichnis der wichtigsten verwendeten Symbole

<u>a</u>	kleine unterstrichene Buchstaben = Spaltenvektoren
<u>A</u>	große unterstrichene Buchstaben = Matrizen
<u>a'</u>	Zeilenvektor
<u>A'</u>	zu <u>A</u> transponierte Matrix
<u>A*</u>	zu <u>A</u> konjugiert-komplexe Matrix
<u>A</u> [†]	zu <u>A</u> adjungierte Matrix
<u>E</u>	Einheitsmatrix
<u>O</u>	Nullmatrix
<u>W</u>	Matrix der diskreten Fourier-Transformation
<u>F</u>	Fourier-Operator
<u>c_k</u>	k-ter Fourier-Koeffizient
<u>c̄_k</u>	k-ter Koeffizient der trigonometrischen Interpolation
<u>κ</u>	Transformationskonstante der diskreten Fourier-Transf.
<u>δ_{ok}</u>	Kroneckersymbol
<u>ψ_n(x)</u>	n-te Hermiteische Funktion
<u>ψ̄_n</u>	Eigenvektor von <u>W</u>
<u>w</u>	$\exp(-j2\pi/N)$
<u>j</u>	Einheit der imaginären Zahlen
<u>N</u>	Anzahl der Stützpunkte bei der trigonometrischen Interpolation und bei der schnellen Fourier-Transformation

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel. 22990